Tres enigmas aritméticos en Platón

César González Ochoa

Algunos diálogos de Platón están llenos de pasajes que involucran cuestiones aritméticas, sobre todo el *Timeo,* la *República,* el *Teeteto,* el *Critias* y las *Leyes.* No sólo de aritmética pura, sino también de armonía, puesto que para los griegos no era posible hablar de una sin hablar de la otra. Muchos comentaristas de Platón no se detienen en estos pasajes pues piensan que son caprichos o juegos, incluso llegan a tacharlos de fragmentos sin sentido. No es casual que esos fragmentos abunden en sus obras de madurez, y se han sugerido algunas razones para ello. Ryle, por ejemplo, supone que Platón escribió el *Critias* para ser presentado a la comunidad pitagórica de Sicilia en su visita en 367-366. Aunque los investigadores no están de acuerdo en la cronología de la obra de Platón, algunos piensan que el *Timeo* es una de las últimas y que otra obra, las *Leyes*, con la cual mantiene afinidades de estilo, estaba todavía en proceso de escritura a su muerte:

> Las afinidades estilísticas entre *Timeo* y *Critias* indican –si pueden realmente indicar algún hecho cronológico– que las tres obras se escribieron durante el mismo periodo, aunque no necesariamente que ese periodo haya sido el último.[1]

A pesar de esta cautela, el autor da varias pistas que indican que estas obras tienen relación con la visita a Siracusa, a donde

[1] Gilbert Ryle, *Plato's Progress,* Cambridge, Cambridge University Press, 1966, p. 238.

llevó el "Estado ideal" ("la sustancia política" de la República) y el *Critias* sin terminar. Si Ryle tiene razón, eso quiere decir que los oyentes de estos diálogos formaban una comunidad especialmente preparada para entenderlos sin problemas. Los lectores posteriores poco a poco hemos ido perdiendo esa capacidad al grado que, en el mejor de los casos, vemos muchos de estos pasajes como acertijos o como enigmas y, para entenderlos, requerimos una cierta información de matemáticas de la escuela de Pitágoras, que es precisamente la que impregna estos diálogos.

No existe una obra sobre la teoría de los números que proceda directamente de Pitágoras o de sus discípulos; el único tratado de la antigüedad data del siglo II de nuestra era y es la *Introducción a la aritmética,* de Nicómaco de Gerasa, autor también de un *Manual de armonía.* Jámblico hizo en el siglo IV una compilación de los escritos de Nicómaco sobre el número, titulada *Theologumena arithmetica,* la cual, traducida al latín por Boecio, ejerció gran influencia en la Edad Media. Como fiel pitagórico, Nicómaco pensaba que si el cosmos estaba ordenado, el número sería su esencia eterna. Según él:

> el caos primitivo, falto de orden y de forma y de todo lo que diferencia según las categorías de la cualidad o de la cantidad, fue organizado y ordenado según el número.[2]

Del número del que habla es el que él llamaba número divino, también llamado número idea; pero existía también el número científico, cuyo modelo ideal era el número divino. Como en el mundo material las únicas cosas permanentes son las formas, y la única realidad es la estructura de las cosas, entonces el número divino es el modelo según el cual fue construido el universo. Tenemos que recordar que en el mundo griego no existían cifras o símbolos exclusivos para representar los números, lo cual dificultaba el cálculo. La notación arábiga y el sistema decimal quitaron

[2] *Theol. Arith.,* citado por Matila C. Ghyka, *El número de oro,* Barcelona, Poseidón, 1979, t. I, p. 23.

ese obstáculo pero a un alto costo, pues hicieron olvidar que la teoría del número y el uso de los números para calcular son dos hechos de distinto orden, y sólo con la entrada en escena de la teoría de conjuntos y de los desarrollos de Cantor y Russell, entre otros, volvió a pensarse en esta distinción.

Nicómaco define el número científico de dos maneras: como una multitud limitada, es decir, como un conjunto numerable finito, y como una combinación de mónadas, de unidades.[3] Esas unidades pueden ser puntos, líneas, planos o sólidos, lo cual se representa en la sucesión de los cuatro primeros números naturales, conocida como *tetractys* y cuyo descubrimiento se atribuye a Pitágoras. La *tetractys* se considera de dos maneras: como serie o sucesión (1, 2, 3, 4) y como conjunto cuya suma es la década (1 + 2 + 3 + 4 = 10). Esta serie de los cuatro primeros números está formada por la unidad, el primer número par, el primer impar y el primer número cuadrado; también es la serie formada por el punto, la línea, el primer plano (tres puntos forman un triángulo) y el primer polígono (el cuadrado). Dice Nicómaco acerca de la década:

> Como el todo era una multitud ilimitada, se necesitaba un orden. Ahora bien, en la década es donde preexistía un equilibrio natural entre el conjunto y sus elementos. He aquí el por qué mediante su razón, el demiurgo se sirvió de la década como canon para el todo, y también el por qué todas las cosas, desde el cielo a la tierra, tienen para los conjuntos y las partes sus razones de concordancia basadas en ella y ordenadas por ella.[4]

---

[3] Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic,* trad. Martin Luther D'Ooge, Nueva York, The MacMillan Company, 1926, libro I, vii, 1.

[4] Ibid., Filolao, siete siglos antes, decía de la década: "Consideremos los efectos y la naturaleza del número conforme al poder que reside en la decena. Es grande, todopoderoso y autosuficiente, principio primero y guía de los dioses, del cielo y del hombre. Sin él, todo es ilimitado, oscuro e inescrutable. La naturaleza del número ha de ser punto de referencia, guía y orientación de toda duda o dificultad. Si no fuera por el número y por su naturaleza, nada de cuanto existe podría ser comprendido por nadie, ni en sí mismo ni con relación a otras cosas [...] Ni la armonía ni la naturaleza del número admiten falsedad alguna. La falsedad y la envidia sólo son compatibles con lo ininteligible y lo irracional". Cit. en Benjamin Farrington, *Ciencia griega,* Barcelona, Icaria, 1975.

La *tetractys* es el cuarto número triangular; por tanto, además de tener los atributos de la década, también tiene las cualidades dinámicas del crecimiento triangular, que es la base para la generación de todos los números triangulares, planos o sólidos.[5] Nicómaco llama a la década el todo, "pues sirve de medida para el todo, como una escuadra y una cuerda en manos del demiurgo".[6] Así, bajo la forma de número puro, en cuanto década, la *tetractys* se convierte en símbolo del universo; finalmente, participa de las cualidades armónicas de la progresión 1, 2, 3, 4, ya que las razones 1 : 2 y 2 : 4 representan la octava; la razón 2 : 3 representa la quinta, y la razón 3 : 4 la cuarta.

El origen del número, así como el de todas las cosas, es, dice Nicómaco, una combinación de lo mismo y de lo otro, es decir, la cualidad de ser la misma cosa y la de ser otra. Los pitagóricos igualan el uno, la unidad, a la idea de identidad, de simpatía, y el dos a la idea de lo otro, de desigualdad. De la unidad se derivan los principios de lo par y de lo impar, identificados con lo limitado y lo ilimitado.[7] Así, pues, el principio de todo lo que existe se

---

[5] "La doctrina de los números planos o poligonales se basa en la posibilidad de disponer las unidades componentes de cualquier número en varias formas regulares en uno o varios planos. Así, la mónada, la unidad, puede verse como el punto geométrico; cualquier número mayor, comenzando con el 2, si sus unidades se disponen en una línea, pueden considerarse como lineales; comenzando con el 3, los números pueden disponerse en un plano para formar las diversas figuras planas, y del 4 en adelante pueden disponerse en tres dimensiones, según la forma de los sólidos". (Martin Luther D'Ooge, "Studies in Greek Mathematics", introducción a Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic,* pp. 54-55). La *tetractys* se representa triangularmente en cuatro filas, una de una unidad, la segunda de dos, la tercera de tres y la última de cuatro. Los números triangulares son, entonces, 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, etc. Su fórmula general es $n(n + 1) / 2$. Todos ellos dibujan triángulos en un plano; de allí que se denominen triangulares; pero también hay números triangulares que ocupan un volumen, como el 4, que se representa como un tetraedro.

[6] *Theol. Arith.,* citado por D'Ooge, op. cit., p. 219.

[7] Hay dos razones para esta identificación. La primera se encuentra en la *Física* de Aristóteles (203a, 13) cuando dice que la suma de números nones sucesivos comenzando desde uno es siempre un número cuadrado (1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16, etc.), pero la suma de números pares sucesivos da un número oblongo

basa en un principio de unidad por el cual cada cosa es ella misma, y un principio de pluralidad por el cual es distinta de las demás. Por tanto, cada cosa supone una síntesis de lo determinado y de lo indeterminado. La primera forma en que se aparece la pluralidad es el dos; no dos cosas concretas sino la dualidad como primera pluralidad. Dice E. de Bruyne:

> En el orden cualitativo de las ideas, Dyas difiere de Monas [...] El Dyas ontológico es el principio u origen, en el orden metafísico, de lo uno y lo múltiple, de lo mismo y de lo otro; en la aritmética, de lo grande y lo pequeño, lo igual y lo desigual; en geometría, de lo que es largo y corto (la línea), ancho y estrecho (el plano), alto y bajo (volumen); en la música, de lo simple, de lo doble, etc.[8]

Antes de seguir adelante vamos a introducir el primer enigma, el cual aparece en el *Teeteto*, libro también tardío según Ryle, pues "podría pertenecer al periodo 358-357, si no posterior" y, por tanto, también incluido entre los textos con oyentes competentes.[9] Hay aquí un pasaje que refiere cómo Teodoro enseñaba a sus alumnos un cierto cálculo. Se transcriben las palabras de Teeteto y se omiten las de Sócrates:

> Teodoro había hecho, ante nosotros, las construcciones relativas a algunas potencias, mostró que las de tres pies y las de cinco pies no se consideran, según su longitud, conmensurables a las de un pie, y continuó así estudiándolas, una por una, hasta la de diecisiete pies; allí se detuvo, no sé por qué. Pareciéndonos infinito el número de potencias, nos vino al espíritu tratar de reunirlas bajo un único

---

de forma variable (2 + 4 = 6, 2 + 4 + 6 = 12, etc.) La segunda razón es que cada número par puede representarse por dos líneas paralelas de puntos, y el proceso de división por el paso de una flecha entre esas líneas. Si el número es par, el proceso puede continuar indefinidamente, pero se detiene y se limita por la introducción de una unidad, que convierte el número en impar. Cfr. Aristotle, *The Metaphysics* (2 v.), ed. y trad. H. Tredennik, Cambridge, Harvard University Press (The Loeb Classical Library), 1969, nota del traductor.

[8] Edgar de Bruyne, *Historia de la estética,* Madrid, Biblioteca de Autores Cristianos, 1963, v. I, p. 51.

[9] G. Ryle, op. cit., p. 276.

> término que sirviera para designarlas a todas. [...] Todo lo que es número fue separado por nosotros en dos grupos: el que puede resolverse en un producto de igual por igual lo hemos representado por la figura del cuadrado y lo hemos llamado cuadrado y equilátero. [...] Los que se intercalan entre los números del primer género, como el tres, el cinco, y, en general, todo número que no puede resolverse en producto de igual por igual pero se resuelve siempre en más grande por más pequeño o más pequeño por más grande y siempre constituye una figura en la cual uno de sus lados es más grande que el otro, lo hemos representado por la figura de un rectángulo [προμήκη] y lo hemos llamado número rectangular. [...] Todas las líneas cuyo cuadrado constituye un número plano equilátero las hemos definido como longitudes. Todas aquellas cuyo cuadrado constituye un número en el cual sus dos factores son desiguales [ἑτερομήκη] las hemos definido como potencias porque, no conmensurables a las primeras consideradas según su longitud, sí son conmensurables si se consideran las superficies que tienen la potencia de formar. Para los sólidos, finalmente, hemos hecho distinciones análogas.[10]

En una vieja traducción al español se sustituye la palabra "potencia" por "raíz"; dice allí:

> Teodoro demostraba que las raíces de tres y de cinco no son conmensurables en longitud con la de uno.[11]

---

[10] *Tht.*, 147d-148b: Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις. [...] Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν. [...] Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἤ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν. [...] Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπὶπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

[11] Platón, *Diálogos* (t. III: *Teetetes, Cratilo, Menón, Laques),* México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1922, sin mención del traductor. La

Lo mismo señala otra traducción muy reconocida, la de Fowler, de la Biblioteca Loeb, donde se lee:

> [Teodoro] dibujó algunas figuras para ilustrar las raíces y mostró que los cuadrados que contienen tres pies cuadrados y cinco pies cuadrados no son conmensurables en longitud con la unidad del pie, y así, seleccionando cada uno hasta el cuadrado que contiene diecisiete pies cuadrados.[12]

La sustitución del término "cuadrado" por "raíz" es justificada por Fowler en una nota aclaratoria a este pasaje; dice allí: "Las raíces cuadradas de 3, 5, etc., son números irracionales. La palabra δύναμις no tiene el significado que damos a potencia, es decir, el resultado de la multiplicación de un número por sí mismo, sino el que damos a raíz, esto es, el número que cuando se multiplica por sí mismo, produce el resultado dado. De aquí que *Teeteto* se refiera sólo a raíces cuadradas y, cuando habla de números y de factores iguales, piense sólo en números racionales. Hacia el fin de la presentación, la palabra δύναμις se limita a las raíces cuadradas de números oblongos. El traductor francés siente que también debe añadir una nota aclaratoria:

> Para *Teeteto*, un número cuadrado perfecto es equilátero: $4 = 2 \times 2$. Su potencia o raíz, por ser directamente conmensurable con la unidad, se llama propiamente longitud. Cualquier otro producto de dos factores es heterómeco: $6 = 2 \times 3$. Su potencia o raíz no es directamente conmensurable sea con la potencia o raíz de los cuadrados perfectos, sea con esos cuadrados mismos. Pero lo es potencialmente porque la superficie que da $\sqrt{6}$, es decir, la superficie obtenida al elevar al cuadrado $\sqrt{6}$, es conmensurable, número a número, con todo cuadrado perfecto y con toda raíz de cuadrado perfecto. Por ser potencialmente conmensurables, esas últimas potencias o raíces se llaman estrictamente potencias. Así, en una sola clase y con una sola palabra, *Teeteto*

---

versión al español de este pasaje coincide palabra por palabra con la del v. 1 de *Obras completas de Platón* (4 v.), México, Compañía Editora Continental, 1957, trad. P. de Azcárate.

[12] Plato VII, *Theaetetus, Sophist,* trad. y nts. H. N. Fowler, Cambridge, Harvard University Press (The Loeb Classical Library, 123), 1967.

ha podido reunir las potencias que son longitudes y las que no son más que potencias. Nuestra vieja lengua matemática permite traducir literalmente [...]: "todas las líneas cuyo cuadrado forma un número heterómeco las hemos llamado potencias porque, no conmensurables a las primeras en longitud, lo son por las superficies que pueden dar".[13]

En las traducciones no hay diferencia entre προμήκη y ἑτερομήκη (148a y b), pues los dos términos se han traducido como 'rectángulo'. Esto no es ninguna novedad ya que los diccionarios autorizados, como el de Liddell y Scott, así lo hacen. Entre las varias acepciones, dicen: "προμήκης, ες, prolonges, elongates *(Tht.,* 148 a); of numbers, made up of two unequal factors (as $8 = 2 \times 4$, $32 = 4 \times 8$), opp. τετράγωνος".[14] Para ἑτερομήκης, ες, dice: "with sides of uneven length, i. e., oblong". En lo que toca a ἑτερομήκες, dice: "oblong rectangle. [...] of numbers, not square, i. e., produced by the multiplication of two unequal factors, as $6 = 3 \times 2$, Pl., *Tht.,* 148 a". Otro diccionario también muy conocido dice: "προμήκης, ες, oblong, allongé, Pl., *Tim.,* 54 a, *Thaet.,* 148 a, DL. 2, 24, nombre produit de deux facteurs inégaux, p. ex. $8 = 4 \times 2$". Y para ἑτερομήκης, ες, dice: "en parl. d'un nombre, qui n'est pas un carré, c. à d. produit par la multiplication de deux facteurs inégaux, c. $8 = 4 \times 2$ (p. opp. à un produit tel que $16 = 4 \times 4$) Plat., *Thaet.,* 148 a, Nicom., 129".[15]

Como se dijo antes, una de las fuentes para todos estos elementos de matemáticas pitagóricas es Nicómaco, y para él un número es llamado heterómeco si su representación,

cuando se describe gráficamente en un plano, es cuadrilátera y cuadrangular, pero los lados no son iguales uno a otro, ni su longitud es igual al ancho, sino que difieren por uno. Ejemplos son 2, 6, 12, 20, 30, 42, etc., porque si se representan gráficamente siempre se construirán así: 1 por 2 igual a 2, 2 por tres igual a 6, 3 por 4 igual a 12,

[13] Platon, *Oeuvres complètes,* t. VIII, 2a. parte, *Théétète,* trad. y nts. Auguste Dièz, París, "Les Belles Lettres", 1976 (1926).

[14] Henry G. Liddell and Robert Scott, *A Greek-English Lexicon,* Oxford, Clarendon Press, 1994 (1843).

[15] A. Bailly, *Dictionnaire grec-français,* París, Librairie Hachette, 1950.

> y los siguientes similarmente, 4 por 5, 5 por 6, 6 por 7, y así indefinidamente siempre que un lado sea mayor que el otro por uno y no por otro número. Sin embargo, si los lados difieren por un número distinto a uno, por ejemplo, por 2, 3, 4, como en 2 por 4, 3 por 6, 4 por 8, o de cualquier otra forma que puedan diferir, entonces no se llamará propiamente número heterómeco sino un número oblongo. (II, xvii, 1)

Dice más adelante:

> debemos hacer la distinción por qué el número oblongo (prómeco) difiere del heterómeco. El heterómeco es, como se dijo, el producto de un número multiplicado por otro mayor que el primero por uno [...] Pero el oblongo es similarmente el producto de dos números diferentes, que difieren sin embargo no por uno sino por algún número mayor, como 2 por 4, 3 por 6, y números similares, que en alguna manera exceden en longitud y sobrepasan la diferencia de uno. (II, xviii, 2)

El enigma se reduce a la pregunta de por qué utilizar dos nombres para los rectángulos. De acuerdo con los diccionarios, esos dos nombres son sinónimos. Pero hay una cuestión sin resolver: el cuadrado (tetrágono) es producto de dos factores iguales; como número, es una cantidad racional y, por tanto, sus lados (sus factores) son conmensurables, es decir, pueden ser medidos uno por el otro. Un rectángulo, por su parte, es producto de dos factores desiguales, pero en este caso existen dos posibilidades: la primera es cuando esos factores son conmensurables (como 2×4, 3×5, etc.) y, en todos los casos, su producto es un número racional. La segunda es cuando esos factores son inconmensurables, lo cual ocurre cuando uno de los lados es un irracional, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc.; en otras palabras, no es una razón epimórica o superparticular. Esto nos conduce a plantear la hipótesis de que *Teeteto* diferencia esta segunda posibilidad al darle el nombre de heterómeco, mientras que a la primera la llama prómeco. Así, cuando dice que "las potencias de tres pies y de cinco pies no son, según su longitud, conmensurables con las de un pie" quiere decir que son las raíces las que no pueden ser medidas con la unidad, pues son irracionales. Sólo pueden medirse con ella cuando se elevan al cuadrado; es decir, son conmensurables en potencia.[16]

Esta interpretación ha sido sugerida por Lund, quien recuerda que los pitagóricos sostenían "la unidad de lo múltiple y el acuerdo de los opuestos" como una de las condiciones de la armonía. Como expresión de estos opuestos fundamentales propusieron la tabla de categorías, en la cual uno de esos pares es precisamente el formado por "tetrágono" y "heterómeco" y su oposición se funda en el carácter racional del primero frente al irracional del segundo.

> Sólo al percibir claramente la distinción entre racional e irracional, tetrágono y heterómeco encuentran su lugar en la tabla de categorías. Como lo opuesto de lo racional, del cuadrado, sólo se puede considerar un rectángulo compuesto de un cuadrado y de una fracción irracional de éste: se combinan para una "armonía inconmensurable".[17]

Habría que investigar por qué Nicómaco, si realmente es un fiel seguidor de los pitagóricos, no menciona esta oposición.

Los otros dos enigmas están en la *República*, pero antes de especificarlos es necesario relacionar el número con la proporción e introducir algunas nociones de armonía. La aritmética griega no se refiere únicamente a los números aislados sino que siempre toma en cuenta las relaciones entre ellos, las cuales se denominan razones. Según Euclides, "una razón *(ratio, logos)* es una especie de relación con respecto al tamaño de dos magnitudes de la misma clase".[18] Dos pares de magnitudes que tienen la misma razón son proporcionales; por tanto, a la igualdad entre dos razones se

---

[16] Liddell y Scott mencionan la expresión εὐθειαι δύναμεις σύμμετροι, que aparece en el libro X de los *Elementos* de Euclides y en el *Timeo* 32 a, y le dan el significado de conmensurables en cuadrado; sin embargo, no la relacionan con el *Teeteto*.

[17] Macody Lund, *Ad Quadratum,* París, Éditions Albert Morancé, 1921, p. 161.

[18] Euclides, *Elementos de geometría,* ed. en inglés: *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* trad. Th. Heath, Encyclopaedia Britannica (Greatest Books of the Western World, 11), 1989, libro V.

denomina proporción. Algebraicamente, la proporción se expresa como a / b = c / d.[19] Nicómaco define la proporción como la combinación de dos o más razones; razón es "la relación de dos términos uno con el otro"; y tal combinación es una proporción

> de manera que tres es el más pequeño número de términos que pueden componerla, aunque pueda ser una serie mayor, sometida a la misma razón o la misma diferencia. Por ejemplo, 1 : 2 es una razón donde hay dos términos, pero 2 : 4 es otra razón similar; de aquí que 1, 2, 4 sea una proporción porque es una combinación de razones, o de tres términos que están en la misma razón uno de otro. (II, xxi, 2-3)

La proporción a la que se refiere Nicómaco es 1 : 2 :: 2 : 4, en la cual los términos medios son iguales; se trata de la proporción continua. En el libro v de sus *Elementos,* Euclides dijo que "una proporción de tres términos es la menor posible". La de cuatro términos es la discontinua. Jámblico reserva el nombre de "analogía" para la continua, y a la de cuatro términos la llama "análogon". Nicómaco habla de diez tipos de proporciones, aunque las primeras tres, ya conocidas por Pitágoras y sus discípulos, son las principales. Según Jámblico:

> En los días antiguos en tiempos de Pitágoras y los matemáticos de su escuela había sólo tres medias,[20] la aritmética y la geométrica, y una tercera que se llamaba entonces subcontraria, pero que se cono-

---

[19] La palabra griega *logos* significa, entre otras cosas, relación, razonamiento, pero también quiere decir razón en el sentido matemático. No deja de ser interesante notar que una palabra que se traduce como razonamiento o como juicio (incluso como discurso), sirva para expresar también una relación entre cantidades. Una razón, una comparación de magnitudes o de los números que las miden, "es la proyección en el plano matemático de la operación elemental del juicio: percepción exacta de las relaciones entre las cosas o las ideas [...] La comparación entre dos o más razones, y la percepción de su equivalencia, de su armonía, de su "analogía", operación ya más sintética de la inteligencia, que armoniza, que enlaza diversos juicios o percepciones elementales, tiene también como proyección esquemática en el plano de los números la ecuación de proporción" (Matila C. Ghyka, *El número de oro,* Barcelona, Poseidón, 1979, v. I, pp. 27-28).

[20] Media o mediana es el término intermedio de cualquier clase de proporción.

ció también como armónica dentro del círculo de Arquitas e Hipaso, porque parecía proporcionar razones armoniosas.[21]

La descripción de las tres proporciones principales según Nicómaco es la siguiente.

Se tiene una proporción aritmética cuando tres o más términos mantienen la misma diferencia cuantitativa entre números sucesivos, pero no la misma razón entre los términos, dicho en otras palabras, cuando el segundo término excede al primero en la misma cantidad que el tercero excede al segundo. Un ejemplo es 2, 3, 4.[22]

La progresión geométrica es, según Nicómaco, la única que es en sentido estricto una proporción; es decir, es la única en la que los términos están en la misma razón: el primero es al segundo como el segundo es al tercero. Un ejemplo es 1, 2, 4. En esta serie, tres números están en proporción uno a otro por el hecho de que las diferencias entre los términos están en la misma razón que los términos mismos a sus adyacentes.

La proporción armónica es aquella en la que el término mayor es al menor como la diferencia entre el término mayor y el medio es a la diferencia entre el término medio y el menor. Por ejemplo, en la serie 3, 4, 6, el término mayor excede al medio por un tercio de él mismo, mientras que el menor es más pequeño que el medio también por una tercera parte. Otro ejemplo es 2, 3, 6; aquí 6 excede a 3 por una mitad, que es la misma fracción por la cual 2 es excedido por 3. Nicómaco habla de una propiedad curiosa: cuando los extremos se multiplican por el medio y se suman los resultados, la suma es igual al doble del producto de los extremos.[23]

---

[21] Iamblichus, *On Nicomachus's Introduction to Arithmetics,* en *Greek Mathematical Works,* v. I.

[22] Si una serie de números como ésta no tiene la apariencia de una proporción es porque los griegos escribían las proporciones, de cualquier tipo, bajo la forma de una progresión o de una serie.

[23] Otra descripción de estas proporciones es la de Arquitas (cfr. Porphyry, "Commentary on Ptolemy's Harmonics", en *Greek Mathematical Works,* vol. I, p. 113);

Encontrar la media o la mediana –es decir, el término intermedio– que da nacimiento a la proporción es equivalente a llenar el intervalo entre los dos extremos; en otras palabras, es armonizar. Un intervalo es el conjunto formado por dos tonos de altura desigual o, como dice Euclides, por dos tonos desigualmente agudos o graves; por tanto, se compone de los tonos de desigual altura y por la razón aritmética que los une. La proporción más elemental se realiza llenando el intervalo entre los extremos 1 y 2, que configuran el intervalo de octava, es decir, la distancia que hay entre un tono puro y otro del doble de altura. Este intervalo se llena al poner entre los dos tonos (o más bien, entre el tono y su doble) otro u otros tonos unidos a los primeros por razones simples, como las existentes entre los primeros números naturales. Platón dice en la *República* que el problema armónico en general, dados dos términos iniciales cualesquiera, consiste en poner en proporción los intervalos por medio de otros términos que estén en razones definidas con los términos iniciales con el fin de obtener la consonancia o el acorde de intervalos. Se puede extender el uso de la noción de armonía a otros dominios: ya sea intercalando el término medio de un silogismo, o relacionando dos imágenes por medio de una metáfora, o reuniendo superficies o volúmenes arquitectónicos por medio de la analogía de la forma; en todos los casos lo que se hace es producir armonía o armonizar. Regresaré a la armonía antes de entrar al tercer enigma.

El segundo enigma que quisiera recordar está relacionado con las formas de gobierno de la ciudad. Dice Platón en la *República*

---

dice allí: "La aritmética es aquella en la cual tres términos están en proporción en virtud de alguna diferencia: el primero excede al segundo por la misma cantidad que el segundo excede al tercero [es decir, b es la media aritmética entre a y c si a - b = b - c]. La media geométrica es aquella en la cual el primer término es al segundo como el segundo al tercero. Aquí los términos mayores forman el mismo intervalo [b es la media geométrica entre a y c si a / b = b / c]. La media subcontraria, que llamamos armónica, es aquella que por cualquier porción en la que el primer término excede al segundo, el término central excede al tercero por la misma parte del tercero [o sea, b es la media armónica entre a y c si (a - b) / a = (b - c) / c, de modo que 1 / c - 1 / b = 1 / b - 1 / c y, por tanto, 1 / c, 1 / b y 1 / a forman una progresión aritmética]".

(546 a-d) que toda aristocracia, incluso la mejor, degenera con el transcurso del tiempo en una tiranía, a través de las etapas intermedias de timocracia (que es un gobierno en el cual el poder lo ejercen los ciudadanos con mayor renta), oligarquía (forma de gobierno en la cual el poder lo ejerce un reducido número de personas) y democracia. Habría, pues, cinco tipos de gobierno según Platón: el real, el timocrático, el oligárquico, el democrático y el tiránico. En ese mismo libro, Sócrates y Glaucón dialogan para dilucidar cuál es el gobernante más feliz y cuál es el orden creciente de grados de infelicidad. La respuesta de Glaucón es que el rey es el más feliz y el tirano el más infeliz, siguiendo el mismo orden en el que le fueron presentadas las formas de gobierno. A continuación presentamos los argumentos de Sócrates (no se transcriben las intervenciones de Glaucón pues no añaden nada a lo que dice Sócrates):

> Me parece que hay tres placeres, uno legítimo y dos bastardos. Habiendo franqueado el límite de los placeres bastardos y huido lejos de la razón y de la ley, el tirano vive con su escolta de placeres serviles y no es fácil determinar cuánto es inferior al otro, excepto de esta manera. [...] Si partimos del hombre oligárquico, el tirano está alejado por tres grados, pues está entre ellos el hombre democrático. [...] Así, el fantasma del placer con el cual cohabita el tirano está tres veces más alejado de la verdad que el fantasma del placer del cual goza el hombre oligárquico, si lo que hemos dicho antes es verdad. [...] A su vez, el oligarca está en tercer lugar con relación al monarca, si contamos por uno solo al monarca y al aristócrata. [...] Entonces el tirano está alejado del verdadero placer tres veces tres grados. [...] Me parece, en consecuencia, que el fantasma del placer del tirano, considerado en su longitud, puede ser expresado por un número plano. [...] No hay más que elevar al cuadrado y después al cubo para ver la distancia que lo separa del rey. [...] E inversamente, si se quiere saber a qué distancia está el rey del tirano para la realidad del placer, se encontrará, hecha la multiplicación, que el rey es setecientas veintinueve veces más feliz y que el tirano es más infeliz en la misma proporción. [...] Qué cifra más extraordinaria acabas de asestar para marcar la diferencia entre los dos hombres, el justo y el injusto, bajo la relación del placer y el dolor [dice Glaucón]. La cifra no es menos exacta y apropiada a sus vidas, si todo se corresponde, días, noches, meses y años. Pero si el hombre virtuoso y justo aventaja tanto en

placer al hombre malo e injusto, ¿qué prodigiosa distancia lo sobrepasará en gracia, belleza y virtud? [Glaucón concluye] Prodigiosa es realmente la palabra.[24]

Parece un capricho señalar que alguien pueda ser 729 veces más feliz que otro; si no fuera así, ¿de dónde sale esa cifra en apariencia arbitraria? Algunos estudiosos se han preocupado por averiguarlo, como por ejemplo Émile Chambry, traductor y anotador de la edición de Guillaume Budé, quien dice en una nota al pasaje transcrito lo siguiente:

> Mitad en broma, mitad en serio, Platón se divierte, como a propósito del número nupcial, en copiar a los pitagóricos que expresan las virtudes y las ideas abstractas por números. Pero su cálculo está lleno de fantasía. El tirano no está alejado del verdadero placer tres veces tres grados, sino cinco grados: rey 1, timócrata 2, oligarca 3, demócrata 4 y tirano 5. Se trata para Platón de alcanzar la cifra de 729, número de días y noches en un año, según Filolao. Para llegar a ella no suma, sino que multiplica las dos distancias entre el rey y

---

[24] *Re.*, 587c-588a: Τριῶν ἡδονῶν, ὡς ἔοικεν, οὐσῶν, μιᾶς μὲν γνησίας, δυοῖν δὲ νόθαιν, τῶν νόθων εἰς τὸ ἐπέκεινα | ὑπερβὰς ὁ τύραννος, φυγὼν νόμον τε καὶ λόγον, δούλαις τισὶ δορυφόροις ἡδοναῖς ξυνοικεῖ, καὶ ὁπόσῳ ἐλαττοῦται οὐδὲ πάνυ ῥᾴδιον εἰπεῖν, πλὴν ἴσως ὧδε. [...] Ἀπὸ τοῦ ὀλιγαρχικοῦ τρίτος που ὁ τὺραννος ἀφειστήκει· ἐν μέσῳ γὰρ αὐτῶν ὁ δημοτικὸς ἦν. [...] Οὐκοῦν καὶ ἡδονῆς τρίτῳ εἰδώλῳ πρὸς ἀλήθειαν ἀπ᾽ ἐκείνου ξυνοικοῖ ἄν, εἰ τὰ πρόσθεν ἀληθῆ; [...] Ὁ δέ γε ὀλιγαρχικὸς ἀπὸ τοῦ βασιλικοῦ αὖ τρίτος, ἐὰν εἰς ταὐτὸν ἀριστοκρατικὸν καὶ βασιλικὸν τιθῶμεν. [...] Τριπλασίου ἄρα, ἦν δ᾽ ἐγώ, τριπλάσιον ἀριθμῷ ἀληθοῦς ἡδονῆς ἀφέστηκεν τύραννος. Ἐπίπεδον ἄρ᾽, ἔφην, ὡς ἔοικεν, τὸ εἴδωλον κατὰ τὸν τοῦ μὴκους ἀριθμὸν ἡδονῆς τυραννικῆς ἂν εἴν. [...] Κατὰ δὲ δύναμιν καὶ τρίτην αὔξην δῆλου δὴ ἀπόστασιν ὅσην ἀφεστηκὼς γίγνεται. [...] Οὐκοῦν ἐάν τις μεταστρέψας ἀληθείᾳ ἡδονῆς τὸν | βασιλέα τοῦ τυράννου ἀφεστηκότα λέγῃ ὅσον ἀφέστηκεν, ἐννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις ἥδιον αὐτὸν ζῶντα εὑρήσει τελειωθείσῃ τῇ πολλαπλασιώσει, τὸν δὲ τύραννον ἀνιαρότερον τῇ αὐτῇ ταύτῃ ἀποστάσει.

Ἀμήχανον, ἔφη, λογισμὸν καταπεφόρηκας τῆς διαφορότητος τοῖν ἀνδροῖν, τοῦ τε δικαίου καὶ ‖ τοῦ ἀδίκου, πρὸς ἡδονήν τε καὶ λύπην.

Καὶ μέντοι καὶ ἀληθῆ καὶ προσήκοντά γε, ἦν δ᾽ ἐγώ, βίοις ἀριθμόν, εἴπερ αὐτοῖς προσήκουσιν ἡμέραι καὶ νύκτες καὶ μῆνες καὶ ἐνιαυτοί. [...] Οὐκοῦν εἰ τοσοῦτον ἡδονῇ νικᾷ ὁ ἀγαθός τε καὶ δίκαιος τὸν κακόν τε καὶ ἄδικον, ἀμηχάνῳ δὴ ὅσῳ πλείονι νικήσει εὐσχημοσύνῃ τε βίου καὶ κάλλει καὶ ἀρετῇ; Ἀμηχάνῳ μέντοι νὴ Δία, ἔφη.

el oligarca por una parte, entre el oligarca y el tirano por otra parte, además eleva al cubo la cifra obtenida 9, y así obtiene el número 729.[25]

Es verdad que Filolao, el profesor de Arquitas, amigo pitagórico de Platón, decía que un año constaba de 364 días y medio de modo que tomados días y noches juntos sumaban 729, pero la explicación no puede ser tan simple, pues en este diálogo las cuestiones relativas al calendario están muy lejanas. No es éste el único caso en que los estudiosos de Platón relacionan el número 729 con lo que dice Filolao; uno de los más importantes especialistas en Platón de este siglo, Cornford, dice que este texto, "tal vez intencionalmente oscuro" se relaciona con los días y noches del año de acuerdo con Filolao; pero también piensa que tanto en este pasaje como en otros están presentes las "correspondencias numéricas entre macrocosmos y microcosmos que a nosotros nos parecen fantasiosas"; concluye de manera dubitativa que "no deben asumirse literalmente, aunque no eran un mero sinsentido para Platón".[26]

Gómez Robledo, en su nota a este pasaje, transcribe íntegramente la citada nota de Chambry, pero añade que, al contrario del estudioso francés, él no ve "ningún misterio, sino que todo es transparente, pero asimismo pueril y arbitrario a más no poder". Dice además, acerca de las palabras de Chambry, sobre la posibilidad de que Platón lo haya expresado en broma y en serio, que ignora si los cálculos son serios o hechos para diversión, pero

> si lo hizo en serio, la explicación más inteligente me parece la de Adam, para el cual el número clave, 729, está aquí para indicar que el rey-filósofo es más feliz que el tirano en cada día y en cada noche del año, y por lo mismo de la vida. De cualquier modo y sea que lo tomemos en serio o en broma, hay aquí, indudablemente, la adora-

---

[25] Platon, *Oeuvres completes,* t. VII, 2ª parte, *La république,* libros viii-x, París, "Les Belles Lettres", 1973.

[26] *The Republic of Plato,* trad., intr. y nts. Francis McDonald Cornford, Londres, Oxford University Press, 1941, p. 315n.

ción del Número en aquellos pensadores: su empeño por representar en una cantidad exacta la infinita distancia –hoy lo diríamos así sin más– que separa la felicidad del justo de la infelicidad del injusto.[27]

Los comentaristas y anotadores de este libro no ven es su relación con la armonía musical y, sobre todo, no relacionan los contenidos de este texto con otras obras de Platón. De allí la tesis de E. McClain:

> no sólo las alegorías matemáticas de Platón son todas susceptibles de un análisis musical –que tiene sentido en cada paso de su aritmética– sino que todas esas alegorías tomadas en conjunto son un tratado unificado sobre la escala musical, de modo que cada una echa luz a las otras.[28]

Lo que es más notable –continúa– es que cuando se estudian la *República*, el *Timeo*, el *Critias* y las *Leyes* como una unidad, se hace posible explicar virtualmente cada acertijo matemático con la ayuda de pasajes relacionados, esto es, con las propias palabras de Platón.

Una pista para tratar de resolver o, al menos, para replantear este enigma sería una frase de este fragmento que dice que "el fantasma del placer del tirano, considerado según su longitud, puede ser expresado por un número plano". Hemos visto que, desde el punto de vista de los pitagóricos, hay variedades de números y una de ellas es la de los planos; otros son los lineales y los sólidos. Si viéramos el orden como algo simplemente lineal, al tirano le correspondería el nivel cinco de infelicidad, puesto que la tiranía ocupa el puesto número cinco en las formas de gobierno; sin embargo, "el tirano está alejado del verdadero placer por un número que es tres veces tres", es decir, es número plano,

---

[27] Platón, *La República*, ver., intr. y nts. A. Gómez Robledo, México, Universidad Nacional Autónoma de México (Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana), 1971, pp. clxxviii-clxxix.

[28] Ernest G. McClain, *The pythagorean Plato. Prelude to the song itself*, York Beach (Maine), Nicolas-Hays, 1984, p. 3.

el 9. La progresión es ahora diferente: si al rey le corresponde el número uno, que es lineal, al timócrata le correspondería el dos y al oligarca el tres; tres es el primer número plano, correspondiente al producto 3×1; por tanto al demócrata le correspondería el producto de 3×2 y al tirano el nueve (3×3).[29] En síntesis, si Glaucón le asigna números sucesivos del uno al cinco a la serie del rey al tirano, Sócrates le asigna 1 al rey, 2 al timócrata, 3 al oligarca, 4 al demócrata y 9 al tirano. Éste es un número plano, porque es el producto de dos números, pero ahora Sócrates pide que lo interpretemos como número lineal en la progresión punto, línea, plano, sólido, de manera que "basta elevar al cuadrado y al cubo" para llegar a 9^3, un sólido, que es 729, correspondiente a la realidad del placer.

Si tomamos en cuenta los elementos que provienen del punto de vista de la armonía, vemos en primer lugar que de los tres placeres de los que habla el texto, el genuino es el modelo de la octava 1 : 2, y los dos bastardos son los otros modelos de la octava, los dobles 2 : 4 y 4 : 8 que aparecen en la progresión 1 : 2 : 4 : 8, que es una de las dos progresiones geométricas con las que el demiurgo construye el alma del mundo (cfr. *Timeo,* 35b-c). Si se le asigna al tirano el número 9, cae por tanto más allá de estos placeres bastardos.[30] Al involucrarnos un poco más en el razona-

---

[29] "La concepción de Euclides de los números planos y sólidos es diferente, y se basa en la posibilidad de representar números por líneas de longitudes correspondientes a las unidades en los números; a su vez las líneas se usan como lados de figuras rectangulares planas o sólidas. El número plano, de acuerdo con esta definición (vii, def. 16) es el producto de dos números (lineales) que se usan como lados; similarmente, los números sólidos son el producto de tres números (def. 17). Por tanto, Euclides excluye los triángulos, pentágonos, etc., de entre los números planos, y las pirámides entre los sólidos, y coincide con la teoría sostenida por Teón y Nicómaco sólo en las figuras y sólidos rectangulares". (Martin Luther D'Ooge, "Studies in Greek Mathematics", introducción a Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic,* op. cit., p. 55).

[30] Según Gómez Robledo, los dos placeres bastardos son "los del hombre oligárquico y del hombre tiránico, cuyos placeres [...] no son sino sombras del placer auténtico propio del filósofo" (op. cit., p. clxxviii). Se trata simplemente de decir algo aunque no haya ningún fundamento.

miento musical y buscar la relación con el número 729, vemos que éste "corresponde a la cualidad musical del tritono (3^6= seis quintas por encima de la fundamental), la peor disonancia posible en los sistemas musicales conocidos por Platón y, por ello, en todos los sistemas tonales occidentales de los siguientes dos mil años. Lo que Platón evaluaba con el número 729 era la relación entre el hombre bueno y el tirano como la mayor tensión posible en un sistema civilizado".[31] Este intervalo, el tritono, la peor disonancia posible, se calificó durante siglos como *diabolus in musica.* Como puede verse, esta explicación está muy lejana de las "correspondencias numéricas entre macrocosmos y microcosmos que a nosotros nos parecen fantasiosas" de las que habla Cornford, o del número de días y noches en un año según Chambry, Adam y G. Robledo.

Otro de los muchos enigmas, éste un poco más elaborado aritméticamente, es el que también se encuentra en la *República* cuando se habla de las armonías que provienen del nacimiento humano. Antes de transcribir este pasaje es conveniente analizar algunos puntos fundamentales de la noción de armonía. Platón habla extensamente en el *Timeo* de armonía aplicada sobre todo a términos tridimensionales; de allí que la proporción geométrica sea la más utilizada. Como se ha dicho antes, en una proporción a, b, c, la media geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos: $b = \sqrt{ac}$. Dice allí:

> no es posible que dos cosas sólidas puedan conjuntarse sin una tercera; se necesita un enlace intermedio para conectarlas. Y el mejor de los enlaces es ese que une de manera más perfecta en la unidad a él mismo y a las cosas que enlaza; y para efectuar esto de la mejor manera posible está la propiedad natural de la proporción. *(Ti.,* 31 b-c)

Cuando se trata de cuestiones geométricas, los griegos no tenían dificultad alguna para encontrar la media; el problema era cuando

---

[31] Siegmund Levarie, "Introduction", en Ernest G. McClain, *The mith of invariance,* York Beach (Maine), Nicolas-Hays, 1984.

se trataba de números, pues tenemos que recordar que en tiempos de Platón no estaba resuelta la cuestión de los irracionales. Se podía trazar, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado cuyos lados medían la unidad, pero no se podía calcular, ya que el valor de esta diagonal es $\sqrt{2} = 1.4142...$, es decir, un número irracional. Por esta razón no podía encontrarse la media geométrica del intervalo de la octava; si consideramos la octava que va de un do al siguiente do, la media geométrica estaría situada en fa # (o sol *b).* Por consiguiente, tampoco podía dividirse con precisión la octava en semitonos exactos. De allí que tanto la progresión aritmética como la armónica hayan desempeñado un papel tan importante en la teoría musical; la razón aritmética divide la octava en un intervalo de quinta y uno de cuarta (do-sol-do), mientras que la armónica lo divide de manera opuesta en un intervalo de cuarta y uno de quinta (do-fa-do). Así, la proporción 1 : 2, es decir, el intervalo de octava, se puede dividir utilizando las medias aritmética y armónica; recordemos que el primer caso, la media aritmética entre a y b es $(a + b) / 2$; por tanto será $(1 + 2) / 2 = 3 / 2$ o, lo que es lo mismo, $1 + 1 / 2$. Para calcular la media armónica, la fórmula es $2ab / (a + b)$; por tanto $2 (1 \times 2) / (1 + 2) = 4 / 3$, es decir, $1 + 1 / 3$. Quiere decir que el intervalo de la octava estará formado por: $1, 1 + 1 / 3, 1 + 1 / 2, 2$.

Precisamente, un experimento atribuido a Pitágoras en el monocordio para mostrar las relaciones entre número y armonía indica que si la cuerda del instrumento tenía una longitud de una unidad, al pulsarla se puede oír una nota dada, la tónica; al duplicar esa longitud (cuando la longitud está en una razón 2 : 1 respecto a la original) la nota que produce está a una distancia de una octava; si la cuerda es una mitad mayor que la original, es decir, $1 + 1 / 2$ o sea $3 / 2$ (en una razón 3 : 2 respecto a la cuerda unitaria) el tono producido está a una distancia o intervalo llamado de quinta; y si se hace la cuerda un tercio mayor ($1 + 1 / 3 = 4 / 3$, es decir, la nueva cuerda está en una razón 4 : 3 respecto a la inicial) la nota que se produce está a un intervalo de cuarta. La matemática griega había encontrado y dado nombre a tres tipos de relaciones entre la unidad y esta misma unidad más una porción alícuota; a la razón 3 / 2, es decir, 1 + 1 / 2, se le llamaba λόγος ἑμιολιος o, en latín, *ratio sesquialtera;* a la razón 4 / 3, es decir, 1 + 1 / 3, se le llamaba λόγος ἐπίτριτος, o *ratio sesquitertia,* y a la razón 9 / 8, o 1 + 1 / 8, se le llamaba λόγος ἐπόγδοος, o *ratio sesquioctava.*[32]

Regresemos a la razón 1 : 2, a la octava. Este intervalo se llena con 1, 4 / 3, 3 / 2, 2. Un principio generalizado en la aritmética griega era evitar las fracciones; de acuerdo con el principio enunciado por Platón *(Re.,* 525d), las fracciones se evitan usando denominadores comunes. En esta progresión, el mínimo común denominador es 6; por lo cual, la serie de la octava se puede escribir ahora con puros números enteros, como 6, 8, 9, 12. Enunciada como una proporción, tendremos: 6 : 8 :: 9 : 12; que es la llamada proporción musical, base de toda la teoría musical griega. Entre 6 y 8 tenemos un intervalo de cuarta (es la distancia que hay de do a fa), que es el mismo que entre 9 y 12; entre 6 y 9 hay un intervalo de quinta (la distancia que hay de do a sol), que es el mismo que entre 8 y 12. Finalmente, la relación entre 8 y 9 se hace equivalente a un tono completo.

Un argumento más elaborado acerca de por qué Platón se ve precisado a cambiar del número lineal al plano y al sólido en el enigma anterior es para evitar el número cinco. Sin intención de explorar a fondo este tema, habría que decir que es común en la mitología antigua (fuente de la de los griegos) hablar del dios como unidad; la unidad divina, que es hermafrodita, por un proceso de división produce una hija, el 2. La unidad no puede procrear, a no ser por la intervención de la dualidad, que es el principio hembra y madre de todo. Platón asume esta idea cuando dice: "podemos comparar el recipiente a la madre, el modelo al padre y la naturaleza que surge entre ellos a su retoño" *(Ti.,* 50d). En la *República,* el principio materno está representado por la matriz de la octava, un círculo sin división; cada revolución de este círculo corresponde a una multiplicación o división por dos:

---

[32] E. de Bruyne, op. cit., pp. 58-9.

> El número 2 es hembra en el sentido de que crea la matriz, la octava, en la cual nacen todos los tonos. Por sí mismo, sin embargo, sólo puede crear "ciclos de esterilidad", según la metáfora de Sócrates, porque la multiplicación y división por 2 nunca puede introducir nuevos tonos. En términos aritméticos, las potencias de 2 generan identidades cíclicas, esto es, dejan invariable la relación musical del ciclo de la octava.[33]

En esta matriz los números nones introducen nuevos tonos; de allí que sean considerados como masculinos: la hembra tiene un papel genéticamente pasivo y son estos números nones los que permiten que la unidad divina se divida. Pero esa división debe realizarse de acuerdo con principios rigurosos; uno de ellos es que deben usarse razones que difieran por una unidad, y entonces cada número non funciona como media aritmética de la razón previa y la subdivide; así, 3 funciona como media aritmética entre 1 y 2 (que se duplican para evitar fracciones y queda así la progresión 2, 3, 4); 5 funciona como media entre 3 y 4, etc. Pero todo modelo debe poseer un principio interno de autolimitación (ésta es una de las lecciones políticas de la *República*), así que sólo se pueden usar los primeros nones. McClain, de acuerdo con lo que dice Platón en las *Leyes*, dice que el número primo 3 genera "ciudadanos de clase de la más alta propiedad"; en este caso serían los tonos generados al introducir el número 3 en la octava: con la razón 2 : 3 se introduce el intervalo de quinta y con la razón 3 : 4, el intervalo de cuarta. Pero el número primo 5 produce "ciudadanos de clase de la segunda más alta propiedad", que serían las terceras mayores con la razón 4 : 5, y terceras menores con la razón 5 : 6. Ya el número 7 genera ciudadanos de tercera clase como son los tonos séptimos, por lo que puede decirse que números primos mayores sólo pueden generar la clase de los esclavos.[34] Por tanto, si dios es el inamovible 1, el punto de referencia, 2 es el receptáculo, la madre,

---

[33] E. G. McClain, *The myth of invariance,* pp. 19-20.

[34] E. G. McClain, *The pythagorean Plato,* p. 14. La interpretación de McClain se basa en algunos elementos de los pasajes entre 754b y 756e de las *Leyes.*

representada por el círculo sin división. El primer hijo es el número primo 3, media aritmética entre ellos; por lo que la progresión (duplicada para evitar fracciones) queda como 2, 3, 4. Este primer hijo tiene un hermano gemelo derivado del significado recíproco de 3, y que funciona como media armónica, por lo que la progresión se convierte en 6 : 8 :: 9 : 12, que es la proporción musical. La introducción del 5 añade tonos, hace más rica la escala, pero se va perdiendo la limitación.

Dice el tercer enigma que hemos escogido:

> Para un nacimiento divino hay un periodo comprendido por un número perfecto; para un nacimiento humano, el número más pequeño en el cual ciertas multiplicaciones dominadoras y dominadas progresan en tres intervalos y cuatro términos, y llegan finalmente, por la vía de la semejanza o de la desemejanza, crecimiento o decrecimiento, a establecer entre todas las partes del conjunto una correspondencia racional expresable. Su base epitrita acoplada con el número cinco, si se multiplica tres veces, produce dos armonías. Una está hecha de un número igualmente igual, tomado cien veces, mientras que la otra está hecha en parte de factores iguales, en parte de factores desiguales, a saber de cien cuadrados de diagonales racionales de cinco, cada una disminuida por uno, o de cien cuadrados de las diagonales irracionales, disminuidos por dos, y de cien cubos de tres.[35]

Gómez Robledo traduce: "El fundamento epitrita de estos términos, una vez acoplado con el número cinco, da lugar, cuando se le multiplica por tres, a dos armonías..." Es fácil ver aquí que no es lo mismo "multiplicar tres veces", es decir, elevar al cubo un número, que multiplicar ese número por tres. Sobre la primera

---

[35] *Re.*, 546b-c: Ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀντρωπείῳ δὲ ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα καὶ | ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ, προμήκη δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος.

armonía, dice que ésta está "constituida por un número igualmente igual y de cien veces cien", lo cual es un absurdo puesto que es muy distinto a "un número igualmente igual tomado cien veces".[36] Esto muestra, en el mejor de los casos, un absoluto desdén por las cuestiones numéricas. Pero el caso límite es el de Cornford quien olímpicamente se salta todo el pasaje y lo vuelve a relacionar con las correspondencias entre macro y microcosmos; dice en la nota:

> Se omite la descripción de este número extremadamente oscuro, que ha sido interpretado de diversas maneras [...] La idea que está detrás de este aparentemente caprichoso pasaje es la afinidad y correspondencia de macrocosmos y microcosmos y la encarnación de los principios matemáticos en ambos.[37]

Siempre la misma explicación, el camino fácil. Veamos algunos de los elementos de este fragmento.

En lo que toca al nacimiento divino la cuestión es relativamente simple puesto que sólo se refiere al problema de los números perfectos; dice Nicómaco acerca de estos números:

> cuando un número, al comparar con él la suma y combinación de todos los factores cuya presencia admite, ni los excede en multitud ni es excedido por ellos, entonces tal número se dice propiamente que es perfecto, como uno que es igual a sus propias partes. Tales números son el 6 y el 28; porque el 6 tiene los factores mitad, tercio y sexta, 3, 2 y 1, respectivamente, y éstos sumados hacen 6 que es igual al número original, no más ni menos. 28 tiene los factores mitad, cuarta, séptima, catorceava y veintiochoava, que son 14, 7, 4, 2, y 1; sumados dan 28, así ni las partes son mayores que el todo ni el todo mayor que las partes, sino que su comparación es en igualdad, que es la cualidad peculiar del número perfecto. (I, xvi, 2)

El número perfecto que aquí se considera es el seis, el menor de todos. La causa de su carácter divino sólo se entiende cuando

---

[36] Chambry, el traductor francés, cae en este mismo error: "Leur base épitritite accouplée avec le nombre cinq, si on la multiplie trois fois, produit deux harmonies, dont l'une est faite d'un nombre également égal et de cent pris cent fois..."

[37] F. M. Cornford, op. cit., p. 269, nota.

se complementa con lo que dice en el *Critias*, donde se señala a Poseidón como el engendrador directo.

Cuando Platón habla de ciertas multiplicaciones dominadoras y dominadas, tendríamos que entender cuadrados y raíces, lo cual sugiere el uso de progresiones geométricas. Ya había dicho que "para armonizar los sólidos nunca basta una sola media: son necesarias siempre dos" *(Ti.,* 32a); esta idea es asumida por Nicómaco y concluye, de modo que "los números planos se unen siempre por una media simple, los sólidos por dos, en la forma de una proporción". Si en el nacimiento humano interviene una progresión geométrica, los "tres intervalos y cuatro términos" se refieren a una serie formada por sólidos. Otra vez apelamos a Nicómaco; en una serie de números planos hay un solo término medio:

> de aquí que veamos dos intervalos entre el término medio y cada extremo, en la relación de razones similares.

En una serie sólida

> sólo se encuentran dos términos medios en la razón apropiada, de acuerdo con la proporción geométrica, y nunca más; de aquí que haya tres intervalos, uno entre los términos medios comparados uno a otro, dos entre los extremos y los medios a cada lado. (II, xxiv, 6-8)

Un ejemplo de esa proporción es el de la proporción musical antes mencionada 6 : 8 :: 9 : 12, de cuatro términos y tres intervalos; se trata de un caso particular que Nicómaco llama "la más perfecta proporción", que es tridimensional y abarca a todas las demás; es, además, la más útil, pues sirve tanto para la teoría musical como para la teoría de la naturaleza del universo. Los extremos, 6 y 12, son tridimensionales: 6 es un número escaleno[38] producto de $1 \times 2 \times 3$ (antes hemos visto que es número per-

---

[38] Son de tres dimensiones en cualquiera de los siguientes casos: "ya sean números multiplicados tres veces por sí mismos, como un cubo, o números multiplicados dos veces por sí mismos y una por otro número, como en un paralelogramos, o productos de tres números desiguales, de manera que sean escalenos". (II, xxix, 1).

fecto) y 12 es un paralelogramo ya que es el producto de $2 \times 2 \times 3$; los términos medios son también de tres dimensiones; el primero, 8, es escaleno: $1 \times 2 \times 4$, y el segundo, 9, es paralelogramo: $1 \times 3 \times 3$. Entonces, se tienen los términos extremos, 6 y 12, y entre ellos se encuentran otros dos términos que preservan las mismas razones de manera que "mientras uno de ellos preserva la proporción armónica, el otro completa la aritmética". Para el caso de esta proporción, que es geométrica y, por tanto, 12 es a 8 como 9 es a 6; según las normas de la proporción aritmética, 12 excede a 9 en la misma razón que 9 excede a 6, y según las normas de la armónica, la fracción por la cual 8 excede a 6, vista como fracción de 6, es la misma por la cual 8 es excedido por 12, vista como fracción de 12. Finalmente, la razón 8 : 6 o 12 : 9 es el *diatessaron* o intervalo de cuarta, porque están en razón sesquitercia; la razón 9 : 6 o 12 : 8 es el intervalo de quinta o *diapente* porque están en razón sesquiáltera, y 9 : 8 es el intervalo de un tono, la razón sesquioctava, medida común de todas las razones en música. El resto del fragmento se reduce a operaciones aritméticas simples.

La base epitrita se relaciona con esa razón en la cual el número mayor es al menor más una porción alícuota de éste correspondiente a un tercio; es decir, es una razón sesquitercia; por tanto se trata de la razón 3 : 4; al estar "acoplada con el número cinco", los tres números forman la serie 3, 4, 5. El producto de estos números es 60, que si "se multiplica tres veces" produce el número soberano de Sócrates, que es 12 960 000, es decir 60^4. Este número "produce dos armonías"; como una de las acepciones más antiguas de armonía según los griegos es simplemente unión, puede interpretarse que este número es el producto de dos multiplicaciones; dicho en otras palabras, se puede factorizar de dos maneras diferentes. La primera "está hecha de un número igualmente igual", es decir, es igual a un número igual de veces; en otras palabras se trata de la multiplicación de un número por sí mismo, por lo que se trata de un cuadrado cuyos lados son los factores iguales: $60^2 \times 60^2$ o 3600×3600. El segundo número (la segunda armonía) no es un cuadrado sino un oblongo, y sus lados, o sea sus factores, son los siguientes: el primero por más fácil de determinar es "cien cubos de tres", o sea $100 \times 27 = 2700$. El segundo es "cien cuadrados de diagonales racionales de cinco menos uno". La diagonal de un cuadrado de lado cinco es $\sqrt{50}$, pero esta raíz da un número irracional; la diagonal racional sería $\sqrt{49}$ (= 7), cuyo cuadrado menos uno es 48. Por lo tanto, la segunda armonía tiene como factores 4800 y 2700; o lo que es lo mismo, el oblongo tiene como lados 4800 y 2700, cuyo producto es también el número de Sócrates, que es "soberano de los mejores y peores nacimientos".

Me parece –y esto puede entenderse como una conclusión– que perdemos una parte importante de la sustancia de los diálogos platónicos si no hacemos caso de los, en apariencia, caprichosos pasajes donde aparecen las nociones aritméticas y armónicas, interpretadas por muchos eruditos como juegos para iniciados, como guiños dirigidos a unos interlocutores sumergidos en una visión pitagórica del mundo, ya que en ellos subyacen ocultas claves importantes. Un estudio filológico no puede estar completo sin los intentos de dilucidar esas porciones. No pretendo haber resuelto los tres fragmentos que he calificado de enigmas, pero sí espero haber llamado la atención hacia esta clase de frases que, por lo demás, abundan en los escritos de Platón.