La influencia de Platón y Aristóteles en la axiomática euclideana

CONRADO EGGERS LAN

1 (p. 29) Kapp y Kurt von Fritz: la prioridad de las premisas. Características de los principios. La elección de axiomas. 2 (p. 33) La axiomática euclídea. Definiciones incorrectas o infecundas. Diferencias entre postulados y axiomas. Evolución del término *axíoma*. 3 (p. 39) Tesis de Szabó: el *axíoma* como demanda sólo aceptable con reservas. Zenón y la aporía del estadio. 4 (p. 42) El concepto de "dialéctica" en Platón y en Aristóteles: similitudes y diferencias. 5 (p. 45) El problema terminológico y la relación entre dialéctica y matemática. 6 (p. 51) La noción platónica de igualdad y los axiomas de Euclides, 7 (p. 52) La alegoría de la Línea: relación entre las *hypothéseis* y la *archè anypóthetos*. El ascenso dialéctico. 8 (p. 60) La presunta crítica de Aristóteles a Platón sobre los principios, Protágoras. El platonismo de Aristóteles 9 (p. 66) Comparación entre el aporte de Platón y el de Aristóteles a la axiomática euclídea.

1 Es sumamente probable que el estudio de Kurt von Fritz sobre los principios en la matemática griega sea el más importante que sobre el tema se haya escrito en los últimos cincuenta años.[1] Así como el didáctico libro de Ernst Kapp sobre la lógica aristotélica[2] se alinea, en punto a lógica, con el de Werner Jaeger,[3] a su vez el de K. v. Fritz se entronca con el de Kapp en cuanto al señalamiento de la posterioridad cronológica que Aristóteles confiere a las premisas respecto de lo que aparece como extraído de ellas.

[1] APXAI 13-103 = *GGAW* 335-429. Otros dos trabajos de singular relevancia para el tema son la "Introducción" de Heath a su traducción comentada, *The 13 Books of the Elements* (vol. I), y los comentarios a la sección axiomática de cada libro de Euclides y el de A. Szabó, *Anfänge des Euklidischen Axiomensystems*, 1960, incluido en *ZGGM* p. 355-461.

[2] *La Lógica en la Grecia antigua*, Puebla, Cajica, 1945 (la 1a. ed. inglesa data de 1942); no hay mención de traductor.

[3] *Aristoteles. Grundlegung einer Geschichte seiner Entwicklung*, Berlín, 2a. ed. W. de Gruyter, 1955; hay trad. española de 1a. ed. de 1923.

1.1 Kapp, en efecto, hace notar que "la definición del silogismo puede comprenderse de dos maneras totalmente diferentes": en una de ellas se comienza "con una combinación dada de premisas" y se busca "las inferencias posibles" a partir de aquéllas, mientras por la otra se parte de "una conclusión dada" y se busca "las premisas posibles". "Debido a que lo primero parece ser lo más natural, casi siempre se pasa por alto el hecho de que Aristóteles consideraba lo segundo al emprender su tarea ... Según Aristóteles, el auténtico silogismo científico puede tener como conclusión un hecho previamente conocido, y la necesaria explicación científica de este hecho formará las premisas."[4]

1.2 Análogamente, dice Kurt von Fritz, "las proposiciones matemáticas no son halladas de modo tal que algunas de ellas sean puestas en funcionamiento por la maquinaria lógica como premisas verdaderamente conocidas y con eso salga a la luz algo nuevo. Antes bien, se comienza con la conjetura de que algo se comporta de tal o cual manera, y luego se hace el intento de demostrarlo de modo rigurosamente lógico, sobre la base de proposiciones conocidas ... También aquí, pues, lo primero es, en cierto modo, el resultado, aunque primeramente sólo como conjetura; y las premisas a partir de las cuales puede ser demostrado son también aquí halladas sólo posteriormente. De ahí también el fenómeno histórico general de que la fundamentación axiomática exacta de una nueva teoría matemática siempre tiene lugar sólo después de que la teoría está bastante elaborada".[5]

1.2.1 Ante esto el matemático Árpád Szabó expresa su protesta: "no se entiende cómo la técnica demostrativa de la matemática griega, en sentido estricto, pudo alcanzar un grado tan alto de desarrollo en la era pre-aristotélica, si la fundamentación de la matemática en principios se produjo sólo más tarde. ¿Es posible, pues, desarrollar una técnica demostrativa casi perfecta, sin que se tenga más o menos en claro lo referente a los fundamentos? ¡Creo que no!"[6] "De hecho, la matemática sistemático-deductiva comenzó por lo menos dos siglos antes de Euclides y ya a mediados del siglo V Hipócrates de

[4] Kapp, ob. cit. en nota 2, p. 140-141.
[5] APXAI 21 = *GGAW* 343.
[6] *AGM* 305 (suprimimos los subrayados del original alemán) y *BGM* 228.

Quíos compuso *Elementos*. Naturalmente, este trabajo científico es simplemente inconcebible sin algunos fundamentos matemáticos y, por supuesto, ya Hipócrates *debe haber puesto* fundamentos al frente de sus 'Elementos', aun cuando *por el momento no sepamos* cuáles pueden haber sido sus fundamentos."[7]

Por el momento, dejamos abierta la propuesta de Szabó.

1.3 Kurt von Fritz no niega que hayan existido formulaciones axiomáticas antes de Aristóteles; pero en cuanto a si había distintos tipos de principios y cómo se diferenciaban entre sí, declara que "antes de Aristóteles no se había alcanzado ninguna claridad". Y precisa el aporte de éste en tres puntos: uno, "que toda ciencia debe partir de primeros principios indemostrables, pero no por eso menos verdaderos y seguros; otro, el intento de "determinar en general las propiedades que deben tener tales principios", y, por último, el de "dividir estos principios en grupos".[8]

1.4 En el cap. 2 del libro I de los *Segundos Analíticos*, Aristóteles señala que "la ciencia demostrativa debe [partir de premisas] que sean verdaderas (*aletheîs*), primeras (*prôtai*), inmediatas (*amésoi*), más familiares (*gnorimóterai*) [que la conclusión], anteriores (*próterai*) [a ésta], causas (*aítiai*) de la conclusión" ($71b_{20\text{-}22}$). Ciertamente, el término griego *gnórimos* se ve mejor traducido al alemán, *einsichtig*, que al español, "conocido" o "familiar", pero también "inteligible" o "comprensible".

1.4.1 "La exigencia de que los primeros principios deban ser 'más conocidos' (*einsichtiger*) que las proposiciones deducidas de ellos", dice K.v.Fritz, "significa, evidentemente, que la elección de lo que es asumido como primer principio y de lo que de allí es deducido no es arbitraria (*nicht frei steht*), sino que es determinada por la relación entrambos, y de manera tal, que lo admitido como principio debe ser en sí más conocido, más simple y más abstracto que lo que de allí es deducido".[9]

1.4.1.1 Esta interpretación de Aristóteles ha sido recordada por Szabó al responder a una pregunta —en debate posterior a una conferencia— del lógico Paul Bernays, quien manifestó: "Actual-

[7] AGM 309-310 y *BGM* 232 (los subrayados son nuestros).

[8] APXAI 92-93 = *GGAW* 417-419.

[9] APXAI 23 = *GGAW* 345-346.

mente sabemos que no hay una distinción esencial entre las cosas que demostramos y las cosas que asumimos sin pruebas, porque podemos escoger diferentes conjuntos de axiomas. ¿Sabían los griegos esto? No deberíamos suponer simplemente que no. Ellos eran probablemente más inteligentes de lo que podemos concebir". La respuesta de Szabó incluye la interpretación de Aristóteles por K. v. Fritz, así como la propia opinión de que los matemáticos del tiempo de Aristóteles —o anteriores— no compartían forzosamente el pensamiento de éste sobre ello; de modo que bien podían considerar que "la matemática elige arbitrariamente (*arbitrarily*) sus principios no demostrados".[10]
1.4.1.2 Kurt von Fritz replica: "si los griegos antiguos hubiesen querido comenzar por elegir sus axiomas 'arbitrariamente' ... jamás habrían logrado construir un ordenado edificio de pruebas matemáticas ... Que hoy se pueda experimentar con la elección de distintos sistemas de axiomas, proviene de que el ámbito de conocimientos matemático-estructurales ha llegado a ser tan grande, y hasta cierto punto tan transparente, que se puede escoger sistemas de axiomas adecuados para su análisis. Pero tampoco entonces esta elección resulta 'arbitraria', en sentido estricto, sino referida al contexto estructural correspondiente". Pues los griegos, al tomar contacto con la matemática babilónica, se enfrentaron a una multiplicidad de métodos y fórmulas muy complejas, pero que conducían sólo a resultados aproximados; por lo cual se propusieron probarlo todo lo más exactamente posible, y no cejaron en ese esfuerzo demostrativo antes de haber accedido a la transparencia de algunas cosas que pudieron poner como principios de la demostración matemática, asegurando la solidez de ésta.[11]
1.5 En el capítulo mencionado, Aristóteles distingue la *thésis* del *axíoma* en que, si bien ambos son primeros principios indemostrables, el primero no es imprescindible para adquirir un conocimiento científico, a diferencia del axioma. Y diferencia dos tipos de *thésis*: la *hypóthesis*, que dice que algo es (o sea, afirma la existencia de al-

[10] A. Szabó, "Dialectics and Euclid's Axiomatics", en *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, p. 1-27. Tomo la cita de las palabras de Bernays, así como la paráfrasis de la respuesta de Szabó y la referencia bibliográfica, de K. v. Fritz, *PTAM* 68 ss.

[11] K. v. Fritz, *PTAM* 69-71 y APXAI 78-79 = *GGAW* 403.

go) y la "definición" u *horismós*, que dice lo que algo es, su significado (*Anal Post.* I 2, $72a_{14\text{-}24}$).

En el cap. 10 del mismo libro (cf. *infra* 8. 1-8.4.3) se nos presenta otra división de los principios: en *koiná* o "comunes" a todas las ciencias cuantitativas e *ídia* o "particulares" de cada ciencia. Así *ídia* son "por ejemplo, una línea que es de tal manera, o la recta", es decir, sólo principios geométricos. Como ejemplo de *koiná* se da la Noción Común 3 de Euclides. No vemos el término *thésis* ni la división terminológica del cap. 2, aunque sí la distinción conceptual: de los *ídia* se supone el significado y, si se trata de cosas muy simples (la unidad, el punto y la línea) también la existencia. De los "atributos esenciales" como "par" e "impar" se supone el significado, pero su existencia debe ser demostrada.

2 Conviene echar una mirada a la axiomática euclideana, para ver qué es lo que hallamos en los *Elementa* (obra compuesta en el 300 a.C., o sea, algo más de 20 años después de que murió Aristóteles) que pueda ser relacionado con lo dicho en los *Analytica Posteriora*.
2.1 Al comienzo del libro I encontramos, sin ninguna explicación, un conjunto de proposiciones divididas en tres grupos.
2.1.1 El primer grupo contiene, bajo el título *Hóroi*, 23 deficiones.[12]
2.1.2 Inmediatamente después vienen 5 *Aitémata* o "Postulados":

"1. Postúlese que desde cualquier punto se trace hacia cualquier punto una línea recta.

"2. Y que una recta limitada [o sea, un segmento de recta] se prolongue continuamente en forma recta.

"3. Y que, con cualquier centro, y a cualquier distancia [esto es, con cualquier radio], se trace un círculo.

"4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.

"5. Y que, si a dos rectas las corta una [tercera] recta, la cual forma sobre la misma parte ángulos internos [que, sumados, son] menores que dos rectos, al prolongarse ambas rectas hacia el infinito, se corten sobre el lado en que los [ángulos internos, sumados, son] menores que dos rectos".[13]

[12] *Elementa* I, ed. Heiberg-Stamatis, Leipzig, Teubner, 1969, p. 1-4.
[13] Ídem p. 4-5.

2.1.3 Finalmente vienen 9 *Koinaì énnoiai* o "Nociones Comunes":

"1. Dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

"2. Y, si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los todos son iguales.

"3. Y, si a cosas iguales se sustraen cosas iguales, los residuos son iguales.

"4. Y, si a cosas desiguales se añaden cosas iguales, los todos son desiguales.

"5. Y las cosas que son el doble de una misma cosa son iguales entre sí.

"6. Y las cosas que son la mitad de la misma cosa son iguales entre sí.

"7. Y las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.

"8. Y el todo es mayor que la parte.

"9. Y dos rectas no comprenden un área".[14]

2.1.4 Sólo las N.C. 1-3 no han visto nunca controvertida su autenticidad; Heiberg considera a las 4-6 como interpolaciones, y Heath extiende tal carácter a la 9. Al comienzo de los demás libros no hay Postulados ni Nociones Comunes. Definiciones sí, en total de 131 (incluyendo las del libro I): las aritméticas son dadas al comienzo del libro VII —aparentemente por ello están ausentes en VIII y IX—, y las estereométricas en el XI (por eso, tal vez, faltan en XII y XIII).

2.2 Examinemos ahora los grupos axiomáticos distinguidos.

2.2.1 En lo que concierne a la definición, veamos primero lo que dice al respecto Aristóteles: los atributos indicados en ella, si se los toma individualmente, deben extenderse a más objetos que al definido, no así tomados en conjunto. P.e. "la tríada" puede ser definida como "número", "impar" y "primo" en los dos sentidos de este término.[15] "Número" corresponde a todos los números; "número impar" corresponde también al 5, al 7, etc.; "número primo" se aplica también al 2. Ningún otro número que el 3, en cambio, es a la vez impar y primo (*Anal.Post.* II 13, $96a_{32}$).

2.2.1.1 Si aplicamos este criterio a las *hóroi* de Euclides, veremos

[14] Ídem p. 5-6.

[15] En un sentido —el único actual— es primo el número no mensurable por otros números; en el segundo el número que no se compone de otros números (y el 1 no era "número" para los griegos").

que en más de un caso no se reúnen las condiciones citadas. P.e. I def.5, "superficie es lo que sólo tiene largo y ancho", no cumple la primera condición, ya que "largo" y "ancho" sólo pueden referirse a una superficie; ni es cumplida la segunda en I def.8, "ángulo plano es la inclinación recíproca de dos líneas sobre un plano, que se encuentran entre sí y no yacen en línea recta", pues vale también para "intersección" (además de que definir "ángulo" por "inclinación" es tautológico, al menos en tal definición). Tales definiciones resultan inútiles: no las vemos aplicadas en ninguna parte.

2.2.2 Hay ciertamente otros casos de definiciones infecundas, como I def. 4 ("línea recta), I def. 7 ("superficie plana"), I def.22 ("rombo"), etc. Cuando hablamos de infecundidad de definiciones, naturalmente, no queremos decir que nunca sean mencionados los términos respectivos, sino que la descripción hecha en dichas definiciones no es utilizada en ningún problema ni teorema: ni en forma explícita (con la misma fórmula textual o bien con una indicación que sugiera su empleo) ni tampoco implícitamente, para seguir la distinción de Neuenschwander.[16] Como explicación, Heath sugiere que estas definiciones "han sido tomadas de manuales anteriores".[17] No necesariamente han existido "manuales anteriores" a Euclides —sólo se los supone en base al testimonio tardío de Proclo—;[18] pero definiciones ha habido ciertamente antes. Conocemos la de "diagonal" (*Menón* 85b$_2$), omitida por Euclides no sabemos por qué, ya que la emplea.

2.2.3 Kurt von Fritz señala dificultades en otro tipo de definiciones como la I def.17: "diámetro del círculo es una recta trazada a través del centro y limitada, en cada una de las [dos] partes, por la periferia del círculo, *y que divide al círculo en dos [partes iguales]*". Hemos subrayado la parte final, que, dice K.v.Fritz, *sobredetermina* la definición, puesto que ya en la primera parte "el diámetro está determinado completa y unívocamente".

Un caso similar al precedente es el de III def.1: "son círculos iguales aquellos cuyos diámetros son iguales o cuyos radios son

[16] E. Neuenschwander, "Die vier ersten Bücher der Elemente Euklids", en *AHES* 9 (1973), p. 325 ss.

[17] *The 13 Books* I p. 189.

[18] Que cuestionamos en nuestro trabajo "Eudemo y el 'catálogo de geómetras' de Proclo", en prensa en *Emerita*, Revista del Instituto Antonio de Nebrija, Madrid.

iguales", ya que, señala K.v.Fritz, podría haber sido expresada como axioma o postulado. Y en el caso de XI def.10, "cuerpos (*stereà schémata*) iguales y similares son aquellos que están circundados por planos similares, iguales [entre sí] en cantidad y magnitud", sostiene K.v.Fritz que estamos frente a un teorema que requiere ser demostrado.[19]

2.2.4 Kurt von Fritz remonta la explicación de estas dificultades a la clasificación aristotélica de los principios. Aristóteles daba, como ejemplo de *koiná*, la N.C. 3 de igualdad euclideana. Pero, al pasar a las *ídia*, Aristóteles no dice una palabra respecto de las proposiciones de igualdad propias de la planimetría o de la estereometría. Ahora bien, con ello queda en el aire la aplicación de los axiomas generales de igualdad en las ciencias particulares. Y esas relaciones particulares de igualdad son las que suscitan dificultades en la axiomática euclideana, como las definiciones mencionadas, o el P. 4 y la N.C. 7.[20]

2.2.4.1 Naturalmente, K.v.Fritz no quiere decir que las dificultades de la axiomática euclideana se deban a Aristóteles. Más bien, si éste no se ocupa de eso, es porque en la "matemática pre-aristotélica" no fue planteado. P.e. Eudoxo —a quien se atribuyen los teoremas del libro XII— ha empleado XI def.10 como un postulado.[21]

2.3 Pasemos a los postulados y a los axiomas. Proclo cita la opinión de "otros (que Gémino)", según quienes los postulados difieren de los axiomas en que "los primeros son propios (*ídia*) de la geometría, los últimos comunes (*koiná*) a toda teoría acerca de la cantidad y de la magnitud" (*In Eucl.* 182, 6-8). O sea, la distinción aristotélica.

También Proclo menciona la diferenciación trazada por Gémino, para quien los axiomas se diferencian de los postulados "como los teoremas difieren de los problemas: pues tal como en los teoremas proponemos que se vea y conozca algo como la consecuencia de las cosas presupuestas, en tanto que en los problemas prescribimos que se procure construir algo", del mismo modo en los axiomas se supone lo que es evidente al conocimiento y en los postulados se supone las construcciones más simples (*In Eucl.* 178,13-179,8). Diferencia que Kurt von Fritz plantea así: los axiomas son proposiciones que es-

[19] APXAI 73-74 = *GGAW* 397-399; *cf.* Heath, *The 13 Books* III p. 265-266.

[20] APXAI 75-76 = *GGAW* 399-400.

[21] APXAI 88 = *GGAW* 413.

tablecen *relaciones*, mientras los postulados tienen que ver con la *existencia* o "producción" de p.e. los objetos geométricos más simples (línea recta, círculo): en ese sentido los postulados euclídeos son como las hipótesis aristotélicas, que, a diferencia de las definiciones, dicen que algo *es*.[22]

2.3.1 Conviene detenernos en este punto, ya que el concepto de "existencia" se presta a malentendidos. Así, A. Seidenberg malinterpreta por completo a Heath al referirse a los llamados "postulados de construcción" (= P. 1-3): Heath habría afirmado que el P. 3 (trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio) "no se refiere a una construcción en absoluto; meramente postula la existencia de un círculo con cualquier centro *A* y cualquier radio". Seidenberg examina la proposición inicial (I 1) de los *Elementos*, y declara: "el postulado 3 no dice nada sobre existencia: dice que uno puede *trazar* un círculo. Y la proposición I 1 no nos pide probar la existencia de un triángulo equilátero, sino *trazar* uno".[23]

Naturalmente, Heath no dice nada tan absurdo como le atribuye Seidenberg, sino, por el contrario, afirma: "los tres primeros postulados declaran la *posibilidad de construir* líneas y círculos"[24] Y según Zeuthen, también el P.5 es necesario, porque, sin "la existencia de la intersección" de rectas que postula, no bastarían los P. 1-3 para resolver la mayor parte de los problemas de construcción de figuras.[25]

2.4 En general los modernos historiadores de la matemática griega están acordes en que, básicamente, los Postulados y las Nociones Comunes de Euclides corresponden en principio —como dicen "otros que Gémino"— a los *ídia* y a los *koiná* de la clasificación aristotélica de las *archaí*. No obstante, también concuerdan los historiadores en que los P. y N.C. euclideanos no se ajustan por completo a dicha clasificación.

2.4.1 Por ejemplo, el P. 4, "todos los ángulos rectos son iguales entre sí", no es un postulado sino un axioma, dado que no afirma la posibi-

[22] APXAI 49-51 = *GGAW* 373-375.

[23] "Did Euclid's Elements, Book I, develop Geometry axiomatically?", en *AHES* 14 (1975), p. 264-265.

[24] Heath, *The 13 Books* I p. 246 (subrayado mío); cf. 124 y 195.

[25] H.G.Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum* (Copenhague, 1896), extractos en *ZGGM*, P. 33-35.

lidad de una construcción —o sea, la existencia—, sino una "propiedad esencial de los ángulos rectos" (Heath), "relaciones de igualdad" (Kurt v.Fritz).[26] Ciertamente, es un *ídion* (geométrico) pero de igualdad.

2.4.2 Por su parte, las nueve N.C. se ajustan a la diferenciación señalada por Gémino, pero no a la aristotélica de ser *koiná*. P.e. la N.C. 7, "las cosas que coinciden (*epharmózonta*) son iguales entre sí" es una proposición puramente geométrica, donde el antiguo procedimiento de "coincidencia" o "superposición" (*epharmózein*) requiere incluso regla y/o compás. También la N.C. 9, "dos rectas no comprenden un área", es un *ídion*, un principio privativo de la geometría.

2.4.3. No se trata, por cierto, de principios infecundos, aun cuando la N.C. 9 sólo es empleada en I 4 y la N.C. 7 también en I 4, y además en I 8 y III 24. El P. 4 es utilizado, en cambio, más de una docena de veces, entre ellas en la primera demostración del "teorema de Pitágoras" (I 47). Como los tres casos corresponden a proposiciones geométricas de igualdad, cabe recordar la explicación de K. v.Fritz (*supra* 2.2.4).

2.5 Ahora bien, pregunta Kurt von Fritz, ¿cómo se explica que Euclides llame "Nociones Comunes" a lo que Aristóteles denominaba "axiomas"?[27]

2.5.1 En busca de una explicación, K.v.Fritz rastrea la evolución semántico del vocablo *axíoma* y de su verbo *axioûn*. En la literatura pre-aristotélica, dice, *axíoma* significa "honra", "estima", "justiprecio" (no da ejemplos, pero tiene sin duda en mente los de Eurípides, Tucídides, etc. dados en el Liddell-Scott). Y el verbo *axioûn* tiene originariamente la acepción de "estimar", "tener por digno" (en Eurípides, Antifonte, Herodoto) y "tener por recto" (Jenofonte, *Memorabilia* II 1,9), de un modo tal, en el último caso, que equivale a "convertir en principio" ("de conducta"). Así pasa a la matemática". Aristóteles habla de "los llamados —en matemática— axiomas". (*Met.* IV 3, 1005a_{20}), lo que evidencia que los matemáti-

[26] Heath, *The 13 Books*, 1 200: K.v. Fritz, APXAI 76 = *GGAW* 400: *cf.* Proclo, *In Eucl.* 188, 4-5 Friedlein.

[27] APXAI 96 y 61-62 = *GGAW* 421 y 385-386.

cos usaban el término *axíoma*, y sin duda para un principio *koinón*. Pero ello no implica que lo hubieran hecho con el significado preciso que le confiere Aristóteles en los *Segundos Analíticos* (ya que, en el libro VIII de los *Tópicos*, Aristóteles lo emplea como un punto de partida de la discusión dialéctica). Y esa amplitud de acepciones explica que, después de Aristóteles, el término fuera aplicado por matemáticos —como Arquímedes— a otro tipo de proposiciones, y que se recurriera a otra denominación —como "Nociones Comunes"— para aquello a lo que Aristóteles llamaba *axiómata*.[28]

3 Árpád Szabó rechaza el importante papel que Kurt von Fritz adjudica a Aristóteles en la consolidación axiomática de la matemática. Está de acuerdo en que la Lógica procede de la Dialéctica, y sobre todo enfatiza el origen dialéctico de la terminología axiomática.
3.1 Szabó cuestiona la "fundamentación etimológica" de la palabra *axíoma* —hecha por K.v.Fritz— "sólo para el sentido supuestamente matemático de esta expresión". Toma el verbo *axioûn* y busca en los diccionarios y encuentra, entre las diversas acepciones, la de "pedir, requerir, exigir" (*bitten, verlangen, fordern*). Y sostiene que el énfasis que tradicionalmente se pone en el significado originario ("tener por digno", "tener por recto") induce a error, ya que sugiere que *axioûn* era usado respecto de demandas que eran efectivamente "tenidas sin duda por dignas", cuando lo cierto ha sido precisamente lo contrario, a saber, que su empleo se hacía en relación con peticiones "falsas" (da como ejemplos Herodoto VI 87 y Pl. *Menéxeno* 239e). Por lo mismo, *axíoma*, "como expresión técnica de la dialéctica, significa originariamente sólo 'reclamo', 'pedido', tal como su sinónimo *aítema*, y absolutamente nada más". Es una aserción que, en la "contraposición dialéctica", se solicita al interlocutor que la conceda; pero que no es algo que pueda ser considerado como "suposición fidedigna", sino, por el contrario, "que no era aceptada sin *reservas*".[29]
3.2 Para entender mejor la interpretación de Szabó, debe tenerse en cuenta que hace remontar la "dialéctica" a Zenón de Elea (ateniéndose al fr. 65 Rose de Aristóteles). Szabó argumenta que Zenón ha sido el

[28] APXAI 29-32 y 96-97 = *GGAW* 351-355 y 422.
[29] *AGM* 384-386 y *BGM* 284-286. La última frase que entrecomillamos la traducimos de *BGM*, ya que allí resulta mucho más clara.

primero en contrastar una *hypóthesis* con otra, y en demostrar indirectamente la validez de una, al poner de manifiesto el absurdo o imposibilidad de la otra. "De estas dos cosas —aplicación de *hypóthesis* y demostración indirecta— consta principalmente la dialéctica de los eléatas; y también la dialéctica platónica no es básicamente otra cosa... que una forma posterior y tal vez más desarrollada de la dialéctica de los eléatas". En lo cual Szabó toma como testimonio el diálogo *Parménides* de Platón.[30]

3.3 Un ejemplo de la dialéctica de Zenón, que permite explicar la fuerza de su doctrina antiempírica y su influencia en la matemática, es la aporía del estadio (Arist., *Física* VI 9,,239b y Simplicio, *In Phys.* 1016, 9-1019,14 Diels). Como en la mayor parte de sus aporías, vemos una *hypóthesis* en que se afirma la unidad del ser —inmóvil en el tiempo y en el espacio, o mejor, fuera de éstos— contrapuesta a otra en que se afirma la pluralidad y el movimiento en el tiempo y en el espacio. Para demostrar la verdad de la primera, Zenón prueba la falsedad de la otra.

Tenemos en el estadio tres grupos de cuatro cuerpos cada uno: un grupo AAAA en reposo, situado en el centro del estadio (el primer A más cerca del punto inicial, el último más próximo al final); un grupo BBBB que avanza hacia el punto final (el segundo B frente al primer A, y el primer B frente al segundo A) y un grupo CCCC que, a la misma velocidad que el BBBB, avanza en dirección opuesta a éste, hacia el punto inicial (el primer C frente al tercer A y el segundo C frente al último A). De ese modo, al término de su movimiento, el último de los B estará frente al primer C. Es decir, el primer B ha recorrido 4C (y el primer C 4B), pero sólo 2A (lo mismo que el primer C: éste ha recorrido el trecho frente a los dos primeros A, mientras el primer B frente a los dos últimos A). En la medida que el ejemplo permite medir una magnitud con letras, y que la velocidad es dicha la misma, tenemos que la mitad es igual al doble del tiempo.

3.3.1 La falacia del razonamiento de Zenón, dice Aristóteles, reside en el supuesto de que un cuerpo tarda el mismo tiempo cuando pasa a otro cuerpo (de igual tamaño) que está en movimiento y cuando pasa, yendo a la misma velocidad, a otro cuerpo (de igual tamaño) que está en reposo (*Fís.* 240a).

[30] *AGM* 333-335 y *BGM* 248-250.

3.3.2 Pero Szabó defiende el argumento sobre la base de la aplicación de la teoría matemática de conjuntos, sugerida por Oscar Becker. El tiempo para Zenón está compuesto de "ahoras" en número infinito, y aparentemente Zenón también concibió al espacio como compuesto de infinitos puntos. Si AB es el doble de largo que CD, y estas longitudes constan de una cantidad infinita de puntos, de acuerdo con la teoría de conjuntos podemos decir que AB = CD, si hay entre ambos una "cardinalidad", o sea, una correspondencia entre los puntos de AB y los de CD. Por lo tanto, Zenón afirmaba correctamente que "la mitad del tiempo es igual a su doble". Con ello demostraba que nuestro "concepto intuitivo de igualdad" sólo es válido para conjuntos finitos, si bien su meta directa en esta aporía era mostrar la inconsistencia de las nociones de "movimiento", "tiempo" y "espacio"; cosa que Aristóteles, lamentablemente, no comprendió.[31]

3.4 Los ocho axiomas de Euclides (Szabó excluye el noveno —como interpolación— porque no habla de igualdad) son axiomas de igualdad, pero con un concepto de "igualdad" muy distinto al eléata: "son afirmaciones cuya verdad es controlada por la experiencia práctico-empírica, incluso en algunos casos por la percepción sensible" (p.e. N.C. 7).

Szabó compara las N.C. de Euclides con dos proposiciones de igualdad "casi matemáticas" del diálogo platónico *Teeteto* 155a: 1) "Nada se vuelve más grande ni más pequeño, ni en tamaño ni en cantidad, en cuanto sea igual a sí mismo" y 2)"Aquello a lo que nada se añade ni se quita no puede crecer ni disminuir, sino que permanece igual a sí mismo". Estas proposiciones no son llamadas por Platón *axiómata* sino *homologémata*, "cosas acordadas" sin problema, a diferencia del *axíoma*.

3.5 Muy probablemente "los matemáticos pre-euclídeos compusieron los *axiómata* de igualdad" para evitar las paradojas de Zenón.[32] Precisamente, dado el carácter supra-empírico otorgado por los eléatas a la matemática, principios empíricos de igualdad como las N.C. de Euclides fueron denominados *axiómata*, porque un matemático no los podía aceptar sin reservas. Pero Aristóteles, que

[31] *AGM* 399-406 y *BGM* 294-298.

[32] *AGM* 390-394, 402 y *BGM* 288-291, 296.

malinterpretó la doctrina eléata, concibió los *axiómata* como principios de validez evidente. Euclides también, pero, consciente de que el significado usual de *axíoma* implicaba reservas en su aceptación, prefirió llamar a los axiomas de igualdad "Nociones Comunes", nombre que suscitaría menos dudas acerca de la "verdad evidente" de dichos axiomas.[32]

4 Las tesis de Szabó requieren un elucidamiento mínimo de lo que cabe interpretar como "dialéctica" en Grecia clásica y de la dependencia terminológica que, respecto de la dialéctica, haya tenido la matemática.

4.1 En Platón hallamos tres caracterizaciones explícitas de la "dialéctica" (de sumo interés, pues son las primeras apariciones, en la literatura griega, de los términos *dialektiké* y *dialektikós*, así como del infinitivo sustantivado *tò dialégesthai*, de sentido equivalente). A las cuales podemos añadir una cuarta (cronológicamente anterior).

4.1.1. La primera descripción es precisada en el *Cratilo* (388b; 390d): la dialéctica trata de discernir lo que es cada cosa, su *ousía*, a través de preguntas y respuestas (cf. *Fedón* $78d_1$, donde se habla de la "*ousía* misma, de cuyo ser damos cuenta tanto al preguntar como responder"). No hay, como en los diálogos "socráticos", una pregunta inicial —cuya respuesta deba refutarse—, sino que la pregunta por la *ousía* está en el núcleo mismo del preguntar y responder.

4.1.2 La segunda caracterización se halla en los libros VI-VII de la *República*: la dialéctica, a diferencia de la matemática, aprehende la *ousía* de cada cosa, dejando por completo al ámbito sensible y marcha, sólo a través de Ideas, hasta el principio fundante. Veremos estos textos más abajo; así como en el *Cratilo* el dialéctico supervisa la tarea del legislador de nombres, aquí asegura la fundamentación de la matemática.

4.1.3 La tercera definición aparece en el *Fedro* (265a-266c) y en el *Sofista* (253d-e): la dialéctica consta de un momento de "recolección" (*synagogé*) —en que se reúne la multiplicidad de Ideas en una sola— y otro de "división" (*diaíresis*), en que se diferencia la unidad de cada Idea, se clasifica a las Ideas según géneros no sólo

[33] *AGM* 411-412 y *BGM* 301-302.

para la mejor diferenciación, sino para ver qué géneros pueden combinarse con cuáles.[34]
4.1.4 La cuarta presentación de la dialéctica (primera cronológicamente) es la de los diálogos "socráticos", juveniles, p.e. *Laques*, *Hipias Mayor*, *Eutifrón*, *Cármides*, etc. Asistimos en ellos a preguntas, por parte del personaje "Sócrates", y respuestas, a cargo de su interlocutor. La primera pregunta concierne a una cualidad humana —cuya posesión debe acreditarse por su conocimiento—, y a través de las preguntas siguientes se refuta la primera respuesta. No obstante, todas las respuestas, por lacónicas que sean, son necesarias para proseguir el diálogo, ya que indican que *hay acuerdo sobre un punto*.
4.2 A diferencia de Platón, la dialéctica no es, para Aristóteles, filosofía (naturalmente, porque la entiende de modo diferente). El modo dialéctico (*dialektikôs*, pero también *logikôs: Anal Post.* 84ab, *Tópicos* 105b) no es el que hoy llamaríamos "lógico" (Aristóteles denomina a esto *analytikôs*), "demostrativo" o "apodíctico", como debe ser el filosófico, sino sólo "acorde a la conjetura", "probable". Por eso, los puntos de partida argumentales del dialéctico no son necesariamente "premisas verdaderas y primarias", sino sólo admisibles por el interlocutor. Se trata de una "gimnasia" mental que nos prepara para la filosofía, ya que, una vez entrenados para poner dificultades de uno y otro lado, en una discusión, nos capacitaremos más para discernir lo verdadero y lo falso en cada caso (*Tóp.*I 2, $101a_{27}$ss.)
4.3 Kapp —junto con otros destacados helenistas —hace derivar la dialéctica aristotélica (y por ende la Lógica) de la platónica; pero sin precisar qué es lo que derivó y cómo. Precisión necesaria, ya que la "dialéctica", incluso en sus cuatro caracterizaciones en Platón, es filosofía, como hemos visto, no en Aristóteles. "Sabemos", dice Kapp, "por ciertos pasajes de las obras posteriores de Platón, que de hecho fue éste quien inventó la noción de la gimnasia mental y quien

[34] Adoptamos, respecto de estos escritos —así como del *Parménides* y del *Político*— un punto de vista en parte similar al expresado por J. Stenzel (*Studien zur Entwicklung der Platonischen Dialektik*, Darmstadt, 3a. ed., reimpresión de la 2a., 1961), y también al de N. Hartmann ("Zur Lehre vom Eidos bei Plato und Aristoteles", en *Kleinere Schriften*, II, Berlín, W. de Gruyter, 1957, p. 157-162).

la introdujo en la práctica de su escuela, la 'academia' original, como preparación obligatoria para los futuros filósofos".[35]

En este párrafo Kapp mezcla, evidentemente, pasajes de *Rep.* VI-VII —que no es una "obra posterior"— sobre la formación dialéctica de los futuros filósofos (cf. *supra* 4.1.2) con el pasaje 135d del *Parménides*, donde el personaje "Parménides" advierte al joven "Sócrates" que, para que no sea destruida la teoría de las Ideas, y con ello "el poder de la dialéctica", debe practicar una "gimnasia", de la cual sólo dice que es "la que has escuchado a Zenón". Pero en ningún momento se identifica "dialéctica" con "gimnasia"; y en cuanto a esta *gymnasía*, como se ve a partir de 137c, consiste en extraer las consecuencias lógicas no sólo de la existencia de la pluralidad —como hizo Zenón, aunque de otro modo—, sino también las de la existencia de la unidad. "Si lo Uno mismo no puede ser múltiple", dice Stenzel, subsisten las objeciones contra la "participación", "pero esta imposibilidad es precisamente posible".[36] No se trata, por consiguiente, de una *gymnasía* como la de los *Tópicos*.

4.4 No obstante, la dialéctica aristotélica es idéntica a la platónica —en sus cuatro versiones— en un punto: es la práctica de un diálogo ordenado mediante reglas, la principal de las cuales consiste en lograr el consentimiento de los interlocutores sobre un tema que se está sometiendo a discusión. Que sepamos, eso sólo ha podido surgir y ser practicado en el marco de escuelas como la Academia y el Liceo.

4.5 Se puede argüir que, como hallamos testimoniado por los propios Platón y Aristóteles, ya antes que ellos los sofistas han argumentado a través de preguntas y respuestas, y cabe suponer que en éstas obtenían la aquiescencia del interlocutor. Pero el único testimonio de que han podido proceder así son los diálogos platónicos, cuyo mecanismo es socrático-platónico. La erística de que se queja Platón en algunos sofistas (caso p.e. de Dionisodoro y Eutidemo) es una disputa anárquica en la cual es lícito cualquier recurso para obtener el triunfo. Por eso dice Aristóteles que el razonamiento de los sofistas no es "dialéctico", porque no procede a partir de premisas probables sino a partir de premisas que *parecen ser* probables pero no lo son (*Soph. Elench.* I 2, $165b_8$).

[35] Kapp, *La Lógica en la Grecia antigua*, p. 42.
[36] Stenzel, *Studien*, p. 32.

Precisamente la Academia platónica parece haber tenido, entre sus más caros propósitos, el de organizar el estudio y discusión de los diversos temas que interesaban a matemáticos y filósofos.

4.6 Por lo dicho, consideramos infundado el intento de Szabó de remontar la dialéctica a Zenón de Elea. Que la dialéctica deba constar de aplicación de *hypothéseis* y de reducción al absurdo, es sólo una hipótesis de Szabó. Éste parece conferir a tal término griego un uso platónico unívoco (error al que nos referiremos sucintamente más abajo). Jamás ha sido atribuido a Zenón de Elea, y su uso en el *Parménides* en referencia a Zenón no prueba nada, ya que en $137b_3$ el personaje "Parménides", también habla de su "propia hipótesis" (y sabemos que, antes que Zenón, practicó Parménides la reducción al absurdo), y en la mayor parte de los casos se refiere a algo que los personajes "Parménides" y "Zenón" no han dicho o refutado. Sobre todo, es notorio que no podemos tomar los diálogos platónicos como testimonio de la historia del pensamiento anterior.[37]

Es cierto que a menudo se incurre en la fórmula inadecuada de referirse a Parménides y a Zenón como "la escuela de Elea". Pero si es correcto pensar a Zenón como discípulo de Parménides en algún sentido, no lo es el crear, en base a ellos, una escuela. Es posible que el fr. 65 (Rose) de Aristóteles sea auténtico, y que éste haya dicho que Zenón fue quien "descubrió la dialéctica"; es además muy propio del pensamiento de Aristóteles, pero no nos asegura en lo más mínimo la credibilidad histórica del aserto, ni Aristóteles lo pretende. Dicho texto es además muy breve (una sola proposición) y no habla de preguntas ni de respuestas: sólo nos permite inferir que *Aristóteles consideró a Zenón como el primero que argumentó partiendo de premisas probables y no de premisas indudablemente verdaderas.*

5 Examinemos la cuestión del traslado de la terminología de la dialéctica a la axiomatización matemática. Como vimos, Szabó sos-

[37] Cf. R. Hirzel, *Der Dialog* I (1895, reimpr. Hildesheim, G. Olms, 1963), p. 175-271, respecto del diálogo platónico; H.Cherniss, "The History of Ideas and Ancient Greek Philosophy" (artículo de 1953, ahora en *Selected Papers*, ed. L.Tarán, Leiden, E. J. Brill, 1975, p. 36-71) sobre el concepto de historia de las ideas en Platón y Aristóteles; y sobre la historicidad del *Parménides* platónico en cuanto a Zenón se refiere, cf. Kurt von Fritz, "Zenón de Elea en el *Parménides* de Platón", trad. Bernabé Navarro, sobretiro de *Diánoia*, 1975.

tiene que la dialéctica, con su elaboración de terminología axiomática, precede cronológicamente a la matemática deductiva.[38] Por cierto que, aun cuando retrotrae la dialéctica a Zenón, Szabó piensa que ya antes había habido matemática, con Tales,[39] sólo que no deductiva.
5.01 Hemos afirmado que no existen fundamentos históricos para hablar de dialéctica antes de Platón y Aristóteles. Hallamos, sí, testimonios de matemática anterior: por lo menos desde Hipócrates de Quíos y Teodoro de Cirene. Y esta matemática —posterior a Parménides y a Zenón— era ciertamente deductiva. Pero no contamos con elementos de juicio (Szabó tampoco, como se ve por las palabras suyas que subrayamos en 1.2.1) para aseverar que p.e. Hipócrates pudo argumentar con fundamentos axiomáticos. Según nuestro punto de vista, pues, hubo matemática deductiva antes de que surgiera la dialéctica, mas no matemática axiomático-deductiva (al menos no sistematizada orgánicamente).
5.001 Ciertamente, si se concediera credibilidad al informe que Simplicio dice transcribir de Eudemo, Hipócrates habría aplicado, en su "cuadratura de lúnulas", el teorema XII 2 de Euclides (atribuido generalmente a Eudoxo), que requiere el denominado "método de exhaución". Para admitirlo, habría que suponer el conocimiento de los P. 1 y 5 y la N.C. 8, pero además muchas otras e importantes proposiciones, como la X I (que implica, por de pronto, V def.4, "axioma de Eudoxo" o "postulado de Eudoxo-Arquímides), la I 41, III 30, V 11, XII 1, etc., que exigen principios axiomáticos como, entre otros, V def.5, P. 2 y 4, N.C. 1-3, etc. O sea, no se trataría de "algunos fundamentos"; como modestamente pedía Szabó, sino de la mayor parte de la axiomática euclideana. Pero ni siquiera B.L. van der Waerden, que está dispuesto a atribuir a Hipócrates "3 postulados 5 axiomas y (por lo menos) 14 proposiciones", piensa que el géometra de Quíos haya podido usar el "método de exhaución".[40]

Simplicio confiesa que ha reproducido "textualmente lo escrito por Eudemo, pero añadiendo unas pocas cosas en favor de la claridad, extractadas de los *Elementos* de Euclides, ya que Eudemo, con su estilo resumido, ha hecho su exposición en relatos concisos, a la

[38] *AGM* 341 ss. y *BGM* 253 ss.

[39] *AGM* 9, 277-278 y *BGM* 13, 180-181.

[40] "Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie", en *AHES* 18 (1978), p. 353-354.

manera antigua" (*In Phys.* 60, 27-30 Diels). Esta es sin duda la razón por la que se suele leer tanta geometría euclídea en Hipócrates. Pero como ha notado Heath, su procedimiento ha de haber sido similar al de Antifonte, el de "cubrir" gradualmente los círculos con polígonos hasta "llegar al límite".[41] Y para esto, como advierte el mismo Simplicio, basta con manejar el problema III 33 sobre la construcción de un "segmento de círculo", para lo cual sólo necesitamos los P. 1 y 3 —no forzosamente enunciados ni explicitados— y algunas nociones de figuras, como la del triángulo isósceles, el círculo y el segmento circular. (Todavía 30 o 40 años después de Hipócrates hallamos una definición del "número par" tan empírica como ésta: "es aquel [número] que no es 'escaleno' sino 'isósceles'", *Eutifrón* 12d$_{9\text{-}10}$.). Es decir, para la "cuadratura de lúnulas" no es menester más que una "geometría de regla y compás", con ningún otro axioma que el de "congruencia" (N.C. 7), los P. 1 y 3 y algunas definiciones más o menos empíricas.

5.1 Inspeccionemos rápidamente la cuestión de la terminología, comenzando por el vocablo *hypóthesis*, tan privilegiado por Szabó.

5.1.1 El uso más antiguo que conocemos de *hypóthesis* es el del tratado hipocrático *De la medicina antigua* (último tercio del s.V a.C.).[42] Allí el autor critica escritos de medicina que, dice, han partido de "suposiciones" o "supuestos" (*hypothéseis*), tales como lo caliente o lo frío o lo seco o lo húmedo, y han pretendido explicar las enfermedades como consecuencia de una o dos de tales cosas.

5.1.2 En *Eutifrón* 11b-c, Platón llama *hypothéseis* a las propuestas de definición que ha dado Eutifrón sucesivamente respecto de "lo santo", y que han sido discutidas y refutadas. *Cf.* en *Fedón* 94b$_1$, la *hypóthesis* de Simias, "el alma es armonía" (y antes, *Hipias Mayor* 302e y *Gorgias* 454c). La diferencia con el tratado hipocrático *VM* es la de que, en éste, la *hypóthesis* era un término (calor, frío), en tanto en estos ejemplos platónicos se trata de una proposición.

[41] T.Heath, A *History of Greek Mathematics* I (Oxford, 1921, reimpr. 1965), p. 328.

[42] La tesis de H.Diller ("Hippokratische Medizin und attische Philosophie" en *Hermes* 80, 1952, p. 385 ss.) de que el tratado *De la medicina antigua* supone al *Menón* platónico, ya no tiene defensa posible. Sobre la ubicación cronológica de dicho tratado —así como sobre los distintos usos tempranos del vocablo *hypóthesis*— nos hemos extendido en la "Introducción" a nuestra edición bilingüe, para el centro de Estudios Clásicos de la U.N.A.M.

5.1.3 Los otros cinco empleos del vocablo en el *Fedón* ($92d_6$, $101d_{2,3,7}$ y $107b_5$) son diferentes, ya que no sólo se trata de proposiciones existenciales (afirman la existencia de las Ideas), sino que son discutidas: en lugar de servir, como en los ejemplos precedentes, como punto de partida a una discusión sobre ellas mismas, permiten una discusión sobre otras cosas. En parte similar es el uso en *Rep.* VI-VII, donde las once veces que vemos el término (9 en la Línea, 2 en la Caverna) se refiere al procedimiento de los matemáticos, de tomar como punto de partida —en sus demostraciones— "lo impar y lo par, las figuras, tres clases de ángulos, etc." ($510c_4$). Como más adelante examinaremos este texto, anticipamos, por ahora, sólo que la diferencia con el *Fedón* radica en que no se trata de proposiciones —ni existenciales ni de otra índole—, sino de términos, como *VM.* Y añadamos que Platón no dice que los matemáticos usaran el término *hypóthesis*, sino que nota que sólo el dialéctico considera tales términos como *hypothéseis*, ya que el matemático los toma por *archaí*, "principios".

5.1.4 Como el pasaje $86e_2$ y ss. es ya tradicionalmente asimilado al de *Rep.* VI en cuanto al término *hypóthesis*, leámoslo: se trata de ver

> "*ex hypothéseos* si [la virtud] puede enseñarse o no. Digo la [expresión] *ex hypothéseos* en el sentido en que los geómetras examinan, cuando alguien les pregunta, p.e. respecto de un área, si se puede inscribir dicha área como triángulo en un círculo dado. Alguno [de los geómetras] responderá: 'No sé aún si esto es de esa índole, pero creo que se puede contar con una *hypóthesis* útil para esta cuestión, a saber, si esta área es tal que, aplicada a la línea dada [en el círculo], es deficiente por un área tal como la que se ha aplicado, me parece que sucederá de una manera, pero de otra manera si es imposible que pase eso. Por consiguiente, usando una *hypóthesis*, estoy dispuesto a decirte lo que ha de suceder en cuanto a si la inscripción de ella [= del área] en el círculo es posible o no'. También nosotros procederemos así con respecto a la virtud —ya que no sabemos lo que es ni cómo es—: usando una *hypóthesis* examinaremos si se puede enseñar o no . . . si la virtud es ciencia, puede enseñarse" (*Menón* $86e_2$-$87b_4$ y $87c_5$).

Aquí, a diferencia de la alegoría de la Línea, Platón atribuye el término *hypóthesis* a los matemáticos. Pero no se trata de un procedimiento axiomático (ni tampoco de poner un punto de partida para la discusión, al modo descripto en 5.1.2), sino de la reducción de un problema complejo a otro supuestamente más simple. No se trata de una "hipótesis" ni de un "supuesto": es una "condición preliminar" de la verdad de lo que se busca. Sólo cabe decir aquí que la *hypóthesis* puede estar "sub"-puesta como los cimientos bajo la casa que se piensa construir.

5.1.5 En el *Parménides* el término *hypóthesis* aparece once veces, y las once en forma de proposiciones existenciales, aunque condicionales (iniciadas con la conjunción *ei*, "si"). En el primer sentido se diferencian de las cinco existenciales del *Fedón*, en cuanto, como la *hypóthesis* de Simias (de Eutifrón, etc.), son sometidas a examen. Y en el segundo se distinguen de la del *Menón*, en cuanto no se trata de una proposición condicional completa, sino sólo de la prótasis: "la *hypóthesis* presente no es 'si lo Uno es uno, ¿qué debe inferirse', *sino 'si lo Uno existe'*" (*Parm.* 142c_2). La apódosis no cuenta para nada, a diferencia del *Menón:* la prótasis no es presentada como "condición" de su verdad.

5.1.6 En cuanto al uso de *hypóthesis* en Aristóteles, también hemos de decir algo más abajo. Pero lo que es claro es que, a diferencia del término *axíoma*, Aristóteles no dice en ningún momento que los matemáticos lo hayan usado (no dice nada similar a "los llamados —en matemática— axiomas" o "los llamados axiomas comunes"). En los caps. 2 y 10 del libro I de *Anal.Post.* califica de *hypóthesis* el procedimiento de los matemáticos de postular la existencia de objetos matemáticos simples —ya veremos por qué lo denomina así—, pero no afirma que ellos mismos lo hayan pensado de ese modo y con ese nombre. Si lo afirmara, sería mucho más difícil explicar por qué Euclides —unos 30 años después— diera a tal procedimiento el nombre de "postulados" e incluyera una figura, el círculo (P. 3), cuya existencia Aristóteles no admitiría que se supusiera.

5.1.7 Lo expuesto muestra un solo uso atestiguado (de los no-atestiguados sería más prudente no hablar) de *hypóthesis* en la matemática preeuclideana —y en la de Euclides—, en el *Menón*. Un uso no axiomático. Axiomáticamente lo hallamos, sí, en la dialéctica platónica, también de algún modo en la dialéctica aristotélica.

5.2 El término *aítema*, "postulado", tampoco lo hallamos registrado en la matemática preeuclideana. La primera vez que aparece es en Platón, *Rep.* VIII 566b_5, "el pedido" o "la demanda" ("del tirano"). En Aristóteles lo encontramos cinco veces, diferenciado de *hypóthesis*, en un contexto innegablemente dialéctico (*Anal.Post.* 76b-77a; *cf.* 86a)

5.3 *Axíoma* es el único de estos términos que, con sentido axiomático, es atribuido a los matemáticos (por Aristóteles). La tesis de Szabó de que el verbo *axioûn* era empleado, no respecto de demandas que eran "tenidas por dignas" sino todo lo contrario, no resiste un serio examen de la evolución semántica de dicho verbo, que lo hallamos tanto con signo positivo como negativo, y quizá más con *sentido neutro* (p.e. los ejemplos que Szabó pone: Her. VI 87, Pl. *Menéx.* 239e y *Rep.* VII 525e-526a), que hay que traducir "estimar" o "considerar". Y ya los usos euripídeos de *axíoma* muestran una nítida tendencia a consagrar el uso positivo del vocablo. Ni siquiera la aparición dialéctica del vocablo en los *Tópicos* (VIII 1, 155b_{15}; 6, 160a_8) permite discernir el matiz de "aceptable sólo con reservas" que le adjudica Szabó.

5.4 No parece, pues, lícito inferir, a partir de la terminología, una relación de prioridad cronológica entre dialéctica y matemática. *Hypóthesis* aparece en la dialéctica mas no en la matemática (al menos en la axiomática). *Axíoma* aparece en la matemática y en la dialéctica, en el tiempo de Aristóteles; pero de su empleo en los *Tópicos* no puede deducirse que se utilizó primero en la dialéctica, ya que sólo aparece en el libro VIII, considerado generalmente posterior a *Anal.Post.* I. *Aítema* lo encontramos antes de Euclides sólo en la dialéctica, y nada asegura que su presencia en Euclides se deba a ello.

5.5 De todos modos, podemos registrar algunos hechos:

1º) sólo a partir de Platón cabe hablar de dialéctica, al menos en el sentido (o sentidos) en que él y Aristóteles la entendieron;

2º) la primera obra matemática en que hallamos un conjunto axiomático de principios de la demostración es la obra de Euclides;

3º) las referencias de Platón y Aristóteles a la matemática de su tiempo muestra que en ésta se estaban realizando considerables esfuerzos para proveerse de bases axiomáticas;

4º) tanto Platón como Aristóteles, en sus diversos tipos de "dialéctica", emplean términos para designar procedimientos axiomáticos que también atribuyen a los matemáticos.

5.6 Sobre la base de estos cuatro *hechos*, podemos hacer una conjetura. Al comienzo del siglo IV a.C. —tras declinar el "iluminismo" de los sofistas filósofos y matemáticos sintieron necesidad de poner un límite a las casi infinitas posibilidades argumentales en cada ámbito temático. La Dialéctica de Platón —inicialmente inspirada por Sócrates— y sobre todo la Lógica de Aristóteles buscaron no sólo estipular reglas para ordenar la discusión sino establecer principios en los cuales pudiera apoyarse la demostración. Dada la proximidad existente entonces entre matemáticos y filósofos (en nuestros testimonios Arquitas, Teeteto y Eudoxo aparecen vinculados con Platón) y el deseo de los matemáticos de que sus demostraciones gozaran de mayor universalidad, se produjo una transferencia parcial de reglas y principios de la Dialéctica platónica y de la Lógica aristotélica a la matemática. También pudo haber transferencia terminológica, pero no necesariamente. En efecto, una vez intensificado el proceso de axiomatización de la matemática, ha de haberse creado en ésta un vocabulario técnico que también pudiera convenir a la filosofía.

6 Hemos examinado la tesis de Szabó en lo referente al concepto de "dialéctica", su antigüedad, su relación cronológica con la matemática axiomático-deductiva y su terminología.

Pero queda un importante punto de su tesis, según el cual los axiomas euclídeos de igualdad son verificados "por la experiencia práctico-empírica, en algunos incluso por la percepción sensible" (cf. *supra* 3.4), y por ello contrapuestos a los dos *homologémata* del *Teeteto* 155a.

Evidentemente, Szabó pasa por alto un importante y debatido pasaje del *Fedón:* "¿Decimos que hay algo Igual? No me refiero a un leño igual a otro leño, ni a una piedra igual a otra piedra, ni a ninguna otra cosa de esa índole, sino a algo distinto, fuera de todas esas cosas, lo Igual en sí... ¿hay acaso ocasiones en que las cosas Iguales en sí mismas (*autà tà ísa*) te parezcan desiguales, y la Igualdad desigualdad?" ($74a_9$-c_2). La insólita expresión *autà tà ísa* ha sido objeto de complicadas interpretaciones e interminable polémica.[43] La interpretación más lógica parece ser la de que el plural hace referencia

[43] Que va —en el tiempo— por lo menos desde D.Tarrant ("Plato's *Phaedo* 74a-b", en *Journal of Hellenic Studies* 77, 1957, p. 124-126) hasta por lo menos M.W.Wedin

al hecho de que la igualdad exige dos o más cosas (ya que aún no habla Platón de algo "igual a sí mismo"). No se trata de dos o más cosas determinadas, como "leños" o "piedras", ya que lo que está en juego no es el carácter de leño en tanto leño ni el de piedra en tanto piedra, sino su relación de igualdad. Por lo tanto, podría expresarse también de este modo: "x = x".

En el pasaje platónico, pues, está explícitamente afirmado el carácter supraempírico de la verdadera igualdad. Por lo mismo, no se ve cómo las N.C. podrían ser derivadas de o controladas por la experiencia. Cuando Szabó dice "en algunos casos por la percepción sensible" sólo puede tener en mente la N.C. 7, que proviene —como ha señalado K.v.Fritz— de un período de la historia de la geometría en que aún no se contaba del todo con la prueba deductiva. Pero no es lícito extender su índole empírica a las N.C. 1-6 (y tampoco a la 8), que son enunciados *a priori*. El concepto de "parte" implica para Platón el de "todo" (cf. *Cármides* $165e_5$), como el de "menor" implica el de "mayor" y el de "mitad" al de "doble"; de modo que la N.C. 8 no supone ninguna experiencia práctica.

7 Puesto que hemos estado hablando del aporte de Platón y de Aristóteles a la axiomatización de la matemática, pero sólo hemos especificado lo que, de acuerdo con Kurt von Fritz, constituye el de Aristóteles, corresponde que digamos lo que entendemos ha sido la contribución platónica.

7.1 Para conveniencia de la exposición, presentamos nuestra traducción de algunos de los pasajes más importantes sobre el asunto.

7.1.1 "Por un lado, [en la primera parte de la sección inteli- 510b
gible de la línea], el alma, sirviéndose como imágenes de las cosas antes imitadas [,o sea, de las cosas sensibles], se ve forzada a indagar a partir de supuestos (*hypothéseis*), marchando no hasta un principio sino a una conclusión.

("*autà tà ísa* and the Argument at *Phaedo* $74b_7$-c_5", en *Phronesis* XXII N° 3, 1977, p.191-215). En la medida que esta cuestión es relacionada con la de *autà tà hómoia* en el *Parménides*, cf. B.Calvert, "A note on Plato's *Parmenides* $128e_5$-$130a_2$", en *Mnemosyne* IV, 35, 1-2, 1982, p.51-59. En lo concerniente al *Fedón*, la polémica abarca cuestiones como la de si *autà tà ísa* son cosas sensibles, o bien entes matemáticos, o "Ideas-copias", o lisa y llanamente Ideas; y en caso de ser Ideas, si una, dos o más.

7.1.2 Por otro lado, [en la segunda parte] avanza hasta un principio no supuesto (*anypóthetos*), a partir de un supuesto y sin [recurrir a] imágenes —como en el otro caso—, haciendo el camino con ideas mismas y por medio de ellas...

7.1.3 ... Creo que sabes que los que se ocupan de geometría c_2
y de cálculo suponen (*hypothémenoi*) lo impar y lo par, las figuras y tres clases de ángulos y cosas afines, según
7.1.4 lo que investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman (*axioûsi*) que deban dar cuenta (*lógon... didónai*) de ellas ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en d
aquello que proponían al examen...

7.1.5 ... Sabes, pues, que se sirven de figuras visibles y hacen discursos (*lógous... poioûntai*) acerca de (*perì*) ellas, aunque no pensando (*dianooúmenoi*) en (*perì*) éstas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, dis-
7.1.6 curriendo (*lógous... poioúmenoi*) en vista al Cuadrado en sí y a la Diagonal en sí, y no en vista de la que dibu- e
jan, y así con los demás. De las cosas en sí que configuran y dibujan hay sombras e imágenes en el agua, y de estas [cosas que dibujan] se sirven como imágenes, 511a
buscando divisar aquellas cosas en sí que no se podrían divisar de otro modo que con el pensamiento" (*Rep.* VI 510b$_2$-511a$_1$)

7.1.7 "Quieres distinguir lo que de lo real (*toû óntos*) e inteli- 511c
gible (*noetoû*) es estudiado por la ciencia dialéctica, como siendo más claro que lo estudiado por las llamadas técnicas, para las cuales los supuestos (*hypothéseis*) son principios (*archaí*). Y los que los estudian se ven forzados a estudiarlos por medio del pensamiento discursivo
7.1.8 (*diánoia*), aunque no por los sentidos. Pero a raíz de no hacer el examen avanzando hacia un principio (*arché*) d
sino a partir de supuestos, te parece que no poseen inteligencia (*noûs*) acerca de ellos, aunque sean inteligibles

junto a un principio. Y creo que llamas 'pensamiento
7.1.9 discursivo' (*diánoia*) al estado mental de los geómetras y afines, pero no 'inteligencia'; como si el 'pensamiento discursivo' fuera algo intermedio entre la conjetura (*dóxa*) y la inteligencia" (*Rep.* VI $511c_4$-d_5)

7.2 La dificultad principal de estos pasajes —y acaso por la misma razón, su clave— reside en la relación entre los conceptos de *hypóthesis* y de *archè anypóthetos*, que hemos vertido, respectivamente, por "supuestos" y "principio no-supuesto". ¿A qué se refieren las *hypothéseis*? Hace ya más de ochenta años Natorp afirmó que éstas son aquí Ideas.[44]

7.2.1 Kurt von Fritz ha argumentado, contra Natorp, "que los *eíde* [es decir, las Ideas,] son los objetos de la sección superior del ámbito de los *noetá* [o sea, de los objetos inteligibles], pues corresponden a los originales entre los *noetá*".[45] Es decir, K.v.Fritz considera la "especie inteligible" de la línea de modo análogo al que Platón hace con la "conjeturable", donde la primera parte era una imitación de la segunda. Platón dice también que la tercera sección de la línea, esto es, la primera de lo inteligible, es imitada en la segunda de lo conjeturable (o más literalmente, "se sirve" de lo conjeturable "como imágenes"). Lo que ciertamente no dice es que la sección última y superior de lo inteligible contenga los originales de la sección inferior de lo inteligible: esto Kurt von Fritz lo infiere por analogía.

7.2.2 Friedrich Solmsen sostiene, por su parte, que las *hypothéseis* "de las que habla Platón aquí, donde sólo quiere concebir teoréticamente un método manejado en la práctica, son los triángulos, ángulos, etc. de las figuras dibujadas, en las cuales encuentra proyectados los *eíde* correspondientes. Para los matemáticos prácticos aquéllos son los objetos —sobreentendidos y no problemáticos— de sus demostraciones o experimentos. Pero a este acto de dibujar p.e. un triángulo, a los fines de la demostración, Platón otorga el significado, completamente nuevo, de un establecimiento de Ideas".[46] Es de-

[44] P. Natorp, *Platos Ideenlehre*, Darmstadt, Wiss.Buchg. 3a.ed. reprod. de la 2a. de 1922 (la 1a. fue de 1902), 1961, p. 192-193.

[45] K.v.Fritz, *PTAM* 52.

[46] Solmsen, *Die Entwicklung der Aristotelischen Logik und Rhetorik*, Berlín, Weid-

cir, según Solmsen, el matemático llega al umbral mismo del ámbito de las Ideas, pero allí no da la cara a éstas sino a lo sensible, de modo tal que sus *hypothéseis* —que para el dialéctico son Ideas— se convierten en dibujos.

7.2.2.1 Kurt von Fritz objeta a Solmsen que en *Rep.* 510b se ha dicho que también el dialéctico, que llega al principio, avanza a partir de una *hypóthesis*, "sin imágenes", por lo cual no puede ser que las *hypothéseis* sean "imágenes".[47]

7.2.3 Cuando le toca el turno de dar su propia opinión, la claridad de K.v.Fritz se torna opaca: "En la subdivisión de los *noetá*, los *eíde* desempeñan un doble papel. Sin duda han de formar los objetos de conocimiento de la sección superior de este ámbito. Pero parecen estar también de cierto modo en la inferior, aunque la analogía exige ahí otra cosa; a esto a su vez corresponde que allí su carácter sea otro. No parece haber habido aún, para Platón mismo, una solución completa de esta dificultad, cuando escribió el libro VI de la *República*; de ahí que tampoco aquí podamos darla. Pero bien podemos mostrar dónde la ha buscado Platón en una fase posterior de su desarrollo". Y emprende el análisis de la denominada "digresión filosófica" de la *Carta* VII —cuya autoría, especialmente en cuanto a ese punto, ha sido cuestionada—, escrita, en el mejor de los casos, veinte años después que *Rep.* VII.[48] Pero como se trata de dos exposiciones no sólo distantes entre sí en el tiempo, sino distintas en forma e intención, la explicación de una por la otra oscurece el significado de ambas.

7.3 Lo que dificulta a Kurt von Fritz, a nuestro juicio, la comprensión cabal de la alegoría de la Línea, es su rechazo de la transparente equivalencia de la *arché anypóthetos* con la Idea del Bien. En rigor, el único argumento que da contra tal equivalencia es el de que, si se pone a la cabeza de los *noetá* u "objetos inteligibles" el Bien, habría que hacer lo propio —en vista de la alegoría del Sol— en la sección

mann, 1929, p. 96-97. K. v. Fritz *PTAM*, 39 y ss., afirma que Solmsen identifica las *hypothéseis* mencionadas en *Rep.* VI con las figuras que el geómetra dibuja. Si es eso lo que realmente Solmsen quiere decir, hay que admitir que lo leemos mucho más claro en la interpretación de K.v.Fritz sobre Solmsen.

[47] *PTAM* 40-41, 46.

[48] *PTAM* 55-60.

"conjeturable" de la Línea con el sol, cuando "no es ése el caso, ya que allí están los múltiples originales del mundo de la percepción".[49]

7.3.1 En primer lugar, debe señalarse que la alegoría de la Línea no es ontológica sino epistemológica: no habla de objetos (aunque su mención a los seres vivos y cosas inanimadas y artificiales, en la segunda parte de lo "conjeturable", impide una claridad total) sino de procesos de conocimiento. No menciona objetos tales como *tà horatá* ("las cosas visibles") y *tà noetá* ("las cosas inteligibles"); sólo se refiere a la "especie" "visible" (*horatón*) y a la "inteligible" (*noetón*). El plural sólo lo hallamos —pero sin sustantivar— al leer que las *hypothéseis* "son inteligibles junto a un principio" (*supra* 7.1.8).

7.3.2 Por lo mismo, la objeción de K.v.Fritz a Natorp, en el sentido de que las Ideas son los *noetá* originales de los *noetá* inferiores (que en 7.2.1 hemos visto que no es algo que Platón diga) no es una hipótesis plausible.

7.3.3 K.v.Fritz acude impropiamente a la alegoría del Sol para afirmar la inequivalencia de la *arché anypóthetos* con la Idea del Bien. No sólo decimos "impropiamente" porque la Línea tiene carácter epistemológico y el Sol ontológico, sino también porque en el Sol no se habla de "dialéctica" —ni ascenso alguno—, ni de *arché*, *hypóthesis*, etc. En cambio, esto sí lo hallamos en la explicación epistemológica de la Caverna, que precede o anuda a la pedagógica, y es, en sus pasajes centrales, un claro correlato de la Línea.

532a

7.3.3.1 "Cuando se intenta, por medio de la dialéctica, llegar a 5
lo que es en sí misma cada cosa, sin ninguno de los sentidos y por la razón, y no se ceja antes de captar, con el
pensamiento mismo, lo que es el Bien en sí, con él se b
arriba al término de lo inteligible" (*Rep.* VII $532a_5b_2$)

533

7.3.3.2 "Mientras [los geómetras] se sirven de supuestos (*hypothéseis*), dejando éstos inamovibles, no pueden dar cuenta (*lógon didónai*) de ellas, Pues si no conocen el principio (*arché*), y anudan la conclusión y los [pasos] intermedios a algo que no conocen, ¿qué artificio con-

[49] *PTAM* 54.

> vertirá a semejante encadenamiento en ciencia?... Por consiguiente, el método dialéctico es el único que marcha, cancelando los supuestos, hasta el principio mismo". (VII $533c_{1-8}$)

7.3.3.3 Como se advierte, los términos y las expresiones son los mismos que en la Línea, y la *arché* hasta la que llega la dialéctica —gracias a la que puede "dar cuenta" de las *hypothéseis*— es la Idea del Bien.
7.4 Ahora bien, según el texto de la Línea (7.1.6), el geómetra habla y piensa en el Cuadrado en sí y en la Diagonal en sí (y el aritmético "está obligado a discurrir sobre los Números en sí", VII $526d_6$), no en el cuadrado y en la diagonal que dibujan. Y cosas en sí, para Platón, son Ideas, son *ousíai*. ¿Piensa el matemático en Ideas, en *ousíai*?
7.4.1 Supongamos que los geómetras enunciaran un teorema como el I 34 de Euclides, "los lados y los ángulos opuestos de un cuadrado son iguales entre sí y la diagonal lo divide en dos [partes iguales]". (El teorema habla, en verdad, de "áreas paralelogramas"; pero como el cuadrado es una de ellas, para el caso es lo mismo.) El enunciado implica por de pronto una definición de "cuadrado" y una de "diagonal"; la primera la hallamos en I def. 22 —no así la de "paralelogramo"—, pero también la tenemos en el *Menón*, poco antes de la definición de "diagonal" —que no sabemos por qué no figura en Euclides— que se atribuye a los "sofistas" en $85b_{2-4}$. Pero dicho enunciado supone algo más: un *cuadrado perfecto* y una diagonal perfecta, que lo divida en dos partes *exactamente iguales*. No se trata de suponer la existencia ontológica de objetos tales, ya que los matemáticos no son metafísicos. Tampoco de la existencia matemática del cuadrado y de la diagonal, como en el caso de una *hypóthesis* aristotélica (que no incluiría, por lo demás, cuadrados y diagonales, sino cosas más simples, como puntos y líneas). Simplemente los matemáticos, para operar con cuadrados, diagonales, círculos, etc., necesitan pensarlos como perfectos, aunque lo que dibujen no lo sea.
7.5 Ahora bien, Platón parece quejarse de que los matemáticos "no estiman (*axioûsi*) que deban dar cuenta" de lo impar y lo par, las figuras, etc. "ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera" (7.1.4: adviértase el significativo empleo de *axioûsi*

—no tenido en cuenta por K.v.Fritz ni Szabó— en un contexto axiomático; cf. 7.3.3.2). Hay quienes, como Szabó, interpretan que Platón está pidiendo definiciones de "par", "impar", etc.[50] Pero ya vimos una definición juvenil de lo par (en *Eutif.* $12d_{8\text{-}10}$), que innegablemente anticipa a la euclídea, que figura textualmente en *Leyes* X $895e_{2\text{-}7}$. Y las definiciones de "cuadrado" y "diagonal" que leemos en el *Menón* muestran que Platón conocía definiciones matemáticas suficientes como para no acusar a los matemáticos de no darlas.

Más bien, pensamos nosotros, puesto que Platón advierte que los matemáticos parten, en sus demostraciones, de números perfectos, figuras perfectas, relaciones perfectas, la explicación que Platón ha de estar pidiendo es la del *ser perfectas de estas cosas.* No se trata de un reproche a los matemáticos por no dar esas explicaciones. Éstas incumben a la dialéctica: lo que Platón señala es que, mientras no se den y uno se maneje con "supuestos", subsiste una falencia que impide hablar de *epistéme,* "ciencia", en sentido estricto. Esta falencia sólo puede superarla la dialéctica.

7.6 En la alegoría del Sol se establece el carácter fundante de la Idea del Bien: "a las cosas cognoscibles [,esto es, a las Ideas,] no sólo les adviene, del Bien, el ser conocidas, sino el existir (*tò eînai*) y la esencia (*ousía*), aunque el Bien no sea *ousía,* sino que excede a la *ousía* en dignidad y poder" (VI $509b_{6\text{-}10}$). Ciertamente, como hemos dicho, la alegoría es epistemológica y no ontológica, como la del Sol, por lo que no cabe esperar que en la Línea la *arché anypóthetos* confiera el ser a las Ideas. Pero la dependencia entre el Bien y las demás Ideas es la misma, pues la Idea del Bien no es meramente ética —como a veces se la ha malinterpretado —o ético-metafísica, sino un *principio de perfección* en todos los ámbitos en que se presente. Como las Ideas son, en sí mismas, lo perfecto en su género, en el Sol deben al Bien su ser.

En la sección inteligible de la Línea sólo tenemos Ideas de objetos matemáticos —cuya existencia no se plantea separada de la de las restantes Ideas—, como el Cuadrado en sí y la Diagonal en sí. La perfección epistemológica con que pueden y deben ser pensados dichos objetos deriva también del Bien como principio de perfec-

[50] *AGM* 300 y *BGM* 224.

ción. Sólo a su luz puede, por tanto, darse cuenta de esos objetos matemáticos perfectos, explicarlos o fundamentarlos.

7.7 Platón dice (7.13) que los matemáticos "suponen lo impar y lo par, las figuras", etc. Y vemos que, aunque Platón dice que estas cosas son para el matemático "supuestos", *hypothéseis*, para Platón mismo estas cosas son Ideas, lo cual no es advertido por el matemático en tanto matemático. Detrás de las *hypothéseis* hay ocultas, pues, Ideas. Y éstas quedan enmascaradas no sólo para los matemáticos sino para los demás. (7.1.4: "ni a sí mismos ni a los demás"). Y si revisamos nuevamente los usos del término *hypóthesis* en Platón, notaremos que este enmascaramiento yace implícito de algún modo en cada caso. Claro que el que usa el término *hypóthesis* ya está, por eso mismo, consciente del ocultamiento. Pero no es ése el caso del matemático de la Línea, pues Platón, como vimos, no dice que emplee el vocablo ni el concepto.

7.8 El ascenso hasta la *arché* también se efectúa a partir de supuestos. Esto es claro: el filósofo examina la naturaleza del objeto oculto en la *hypóthesis* del matemático. P.e. al examinar el cuadrado perfecto en que piensa el matemático halla una notable diferencia con cualquier cuadrado que se pueda ver o dibujar, y lo considera como el Cuadrado en sí, la *Idea* de Cuadrado. El que este ascenso sea hecho "con Ideas mismas y por medio de ellas" (7.1.2), sólo permite sospechar —ya que aquí no se establece ninguna jerarquización entre Ideas, salvo entre todas éstas y el Bien— que la comparación de unas Ideas con otras arroje cada vez más luz, hasta acceder a la fuente de su perfección, el Bien.

7.8.1 No es improbable incluso que Platón haya concebido la teoría de las Ideas de un modo como el descripto en el ascenso dialéctico, a partir de la observación de la tarea de los matemáticos. En el *Fedón* parece claro que la Idea de Justicia, lo Justo en sí, la justicia perfecta que no hallamos en el mundo circundante, ha sido pensada por Platón a imagen y semejanza de lo Igual en sí o Igualdad.

7.9 De acuerdo con lo dicho, la dialéctica es una "meta-ciencia" o una "filosofía de la ciencia", aunque Platón sólo la llama "ciencia", es a la vez una ciencia fundante de las matemáticas. Naturalmente, no pretendemos que la dialéctica sea para Platón sólo epistemología, ni aunque nos restrinjamos a la *República* solamente. La dialéctica es metafísica, como lo muestra claramente la alegoría del Sol, pero también ética y política, como se ve en la alegoría de la Caverna. En la alegoría de la Línea, y en la explicación epistemológica de la Caverna también, la dialéctica es filosofía de la matemática.

8 Kurt von Fritz sostiene que el capítulo 10 del libro I de los *Segundos Analíticos* contiene, en más de un punto, una réplica de Aristóteles a la referencia de Platón a los matemáticos en *Rep.* VI 510c y ss. Dada la importancia del texto, lo traducimos íntegramente.

8.1 "Llamo 'principios' (*archaí*) en cada género [científico] 76a
a aquellas cosas que no se pueden demostrar. Se supone
(*lambánetai*) el significado tanto de los primeros [principios]
como de lo que deriva de ellos. La existencia, por
el contrario, es supuesta necesariamente respecto de los
principios, pero en cuanto a las demás cosas hay que
8.1.1 demostrarla. P.e. [suponemos] qué [significan]
"unidad", "lo recto" y "triángulo"; en cambio, suponemos
la existencia de la unidad y de la magnitud, pero el
resto debe ser demostrado.
8.2. [Los principios] de los cuales se sirven las ciencias demostrativas
son [de dos clases]: los particulares (*ídia*) de
8.2.1 cada ciencia y los comunes (*koiná*), aunque son comunes
por analogía, puesto que [cada uno] es útil en cuanto [se
lo aplica] en el género que corresponde a la ciencia
8.2.2 [particular]. [Principios] particulares son p.e. que la
línea es de tal manera y la recta [de tal otra, etc.]. [Principios]
comunes son p.e. que cuando se sustraen cosas
iguales a cosas iguales las cosas restantes son iguales. Es
8.2.3 suficiente [suponer] cada uno de estos [principios, sólo]
en lo concerniente al género [particular]. En efecto, se
logrará lo mismo aunque no se los suponga en toda su 76b
extensión, sino sólo [para el geómetra] respecto de magnitudes
y para el aritmético respecto de números. Son
8.3 particulares [de cada ciencia] aquellas cosas cuya existencia
la ciencia supone, y cuyos atributos esenciales (*tà
hypárchonta kath'hautá*) estudia. Así, en la aritmética

las unidades y, en la geometría los puntos y líneas;
de estas cosas, en efecto, suponen la existencia y al ser de
tal manera. Pero de sus atributos esenciales se supone
8.3.1 [sólo] lo que significa. P.e. la aritmética [supone] qué
[significa] 'impar', 'par', 'cuadrado' o 'cubo' y la
geometría qué lo 'irracional', el 'desviarse' o 'inclinarse'
8.3.2 [de una recta]; pero que existen, debe demostrarse por
medio de los [principios] comunes y de las [proposi-
ciones ya] demostradas" (*Anal.Post* I 10,76a_{31}-b_{10})
8.4 "Los términos (*hóroi*) no son hipótesis, porque no dicen
que algo existe o no existe, sino que las hipótesis [están]
en las proposiciones, mientras a los términos sólo es ne-
cesario comprenderlos; y eso no es una hipótesis, salvo
que se afirme que lo que se escucha [y comprende] es
una hipótesis. Más bien [hay hipótesis cuando, supues-
tas] ciertas cosas, en razón de estar [supuestas], se pro-
duce la conclusión. Y el geómetra no hipotetiza
8.4.1 (*hypotíthetai*) falsamente, como dicen algunos que sos-
tienen que no se debe recurrir a la falsedad, y que el
8.4.2 geómetra habla falsamente cuando dice que la [línea]
dibujada es de un pie [de largo] o que es recta, cuando
8.4.3 no es de un pie ni es recta. El geómetra no concluye na- 77a
da del ser de la [línea] particular que ha mencionado, si-
no de aquellas cosas que, por medio de sus [dibujos] han
sido ilustradas" (*Anal.Post.* I 10, 76b_{35}-77a_{3})

8.4.4 En el pasaje 8.4 hemos seguido la propuesta de F.Solmsen y de K. v. Fritz, de que *hóroi* significa "términos" y no "definiciones", como dicen D. Ross y la casi totalidad de los traductores (así como de que *protáseis* es "proposiciones" más bien que "premisas"); no porque tomemos partido en la disputa, sino para poder seguir mejor la tesis de K. v. Fritz. Y hemos diferenciado *lambánein* de *hypotithénai*, traduciendo el primero por "suponer" y el segundo por "hipotetizar", de modo que todo "hipotetizar" sea un "suponer", pero no todo "suponer" sea "hipotetizar" (se "hipotetiza" sólo la existencia; el significado sólo se "supone").

8.5 Dice Kurt von Fritz que sería demasiada coincidencia que Aristóteles ponga aquí los mismos ejemplos que Platón en *Rep.* 510c_4: "lo impar y lo par"; "el desviarse" (K.v.F. traduce "estar quebrado") y "el inclinarse" "de las líneas" son, afirma, aquello "por medio de lo cual son engendrados los ángulos y luego las figuras". "Lo que aquí quiere decir Aristóteles es que lo impar y lo par en la aritmética y los ángulos en la geometría no son los fundamentos de la demostración de los cuales parten los matemáticos". Estos fundamentos "consisten más bien en proposiciones" "*en* las cuales aparecen aquellos términos, y *sobre* los objetos que con ellos son designados, pero no consisten precisamente en aquellos términos".

Respecto del pasaje 76b_{35}-77a_3, K.v.Fritz halla una clara confirmación de que Aristóteles se está refiriendo a *Rep.* VI, en este caso al pasaje 510d_5-e_1 (*supra* 7.1.5-7.1.6): "Aristóteles se vuelve aquí contra la objeción de que el geómetra parte de falsos principios cuando supone que una línea (dibujada), que no es recta, es recta. Esta objeción, dice Aristóteles, no está bien fundada, puesto que el geómetra no basa su conclusión en que la línea (dibujada) que ha designado como recta es recta. En el lenguaje de la teoría aristotélica de la demostración esto es exactamente lo mismo que, al fin del libro VI 510d, había expresado Platón diciendo que los matemáticos practicaban sus investigaciones *en* las figuras dibujadas pero no *sobre* las figuras dibujadas, sino sobre el Cuadrado como tal y sobre la Diagonal en sí. Todo esto en conjunto excluye cualquier duda de que Aristóteles, en la mayor parte del capítulo 10, se opone a las explicaciones de Platón al final del libro VI de la *República*".[51]

8.6 La tesis de Kurt von Fritz es no sólo novedosa e incitante: a nosotros nos dice algo sobre lo que piensa respecto del papel que cabe a Platón en la axiomática euclideana.

8.6.1 Examinemos primeramente lo que concierne a la identidad o similaridad de ejemplos (de Aristóteles 8.3.1 y de Platón 7.1.3).

8.6.1.1 Evidentemente, Kurt von Fritz debe forzar la elección de ejemplos aristotélicos para hacerlos coincidir con los platónicos. Desde el comienzo del capítulo 10 (cf. 8.1.1) se ejemplifica con "unidad", "recto", "triángulo", "unidad", "magnitud", "línea",

[51] APXAI 38-42 = 361-365, subrayado del autor. Al parafrasear el segundo pasaje aristotélico, K.v.Fritz pone entre paréntesis "dibujada"; pero la palabra que Aristóteles omite es "línea".

"recta", N.C. 3 (8.2.2), nuevamente "unidades" (o "números", como interpreta Ross), "punto", "línea", "impar", "par", "cuadrado", "cubo", "irracional", "desviarse" o "inclinarse" de una recta. Como aquí "cuadrado" y "cubo" no son figuras —K.v. Fritz traduce "números cuadráticos" y "cúbicos"—, fuera del "triángulo" no vemos otra figura. No se entiende por qué hay que atenerse al pasaje donde se habla de "lo impar y lo par", e interpretar que allí el "desviarse" o "inclinarse" hablan de figuras.

8.6.1.2 Si Aristóteles pensó que, cuando Platón dice que los matemáticos toman como *hypóthesis* lo impar y lo par, quería decir con *hypóthesis* lo mismo que él (que él en *Anal.Post.* I 10), no podría haberlo aceptado, ya que "impar" y "par" son "atributos esenciales", y de éstos sólo cabe suponer su significado, pero no hipotetizar su existencia. Pero no podría haber hecho la misma objeción respecto de las "figuras y tres clases de ángulos" (la existencia de las figuras debería demostrarse —o sea acreditar la posibilidad de su construcción— por no considerarlas suficientemente simples —a diferencia de Euclides—, pero probablemente no habría cuestionado los ángulos).

8.6.1.3 Por lo demás, desde el comienzo del cap. 10 hasta $76b_{10}$ (o sea, desde 8.1 hasta 8.3.2), Aristóteles no da señales de estar discutiendo con nadie. Describe cómo proceden los matemáticos, en parte, y en parte cómo desearía que procedieran. Pero hasta las palabras "como dicen algunos" (8.4.1) no hay indicio alguno de diálogo o debate.

8.6.2 Examinemos ahora la sección que sí presenta signos polémicos.

8.6.2.1 Indudablemente, el pasaje 510d de *Rep.* VI ofrece más de una dificultad, porque tanto la expresión *lógous poieîsthai* ("hacer discursos" o "discurrir") como la preposición *peri* ("acerca de", "en: 7.1.5) son aplicadas allí a la vez a las "figuras visibles" y a "aquellas cosas a las cuales éstas se parecen". Pero la interpretación del pasaje por K.v. Fritz (8.5, donde traducimos *an* por "en" y *über* por "sobre") parece ser la única posible, y nosotros además la compartimos plenamente. Ambos, Platón y Aristóteles, dicen que el geómetra investiga *en* las figuras dibujadas pero no *sobre* éstas (*cf.* 8.4.2-8.4.3).

8.6.2.2 Lo que no se entiende es por qué dice K.v. Fritz que "Aristóteles se vuelve aquí contra la objeción", etc. Especialmente que en seguida dice que "esto es exactamente lo mismo que" había dicho Platón; a pesar de lo cual insiste en que esto confirma que Aristóteles "se opone a las explicaciones de Platón".

8.6.2.3 Que las *hypothéseis* de los matemáticos sean para Platón términos y no proposiciones como las de Aristóteles, cabe poca duda. Pero no es eso lo que Aristóteles discute cuando rechaza la afirmación aludida con el "como dicen algunos": allí se refiere a la crítica de los que entienden que el geómetra infiere con base en dibujos.

8.6.2.4 Hay por lo menos uno o dos pasajes aristotélicos similares al que estamos viendo.

Así, en *Metafísica* N, donde está atacando presumiblemente al Platón del *Sofista*, que ha dicho que el "no-ser" es lo falso (el sofista, al hablar falsamente, dice "lo que no es"), declara:

> "Se pretende que 'lo que no es' quiere decir lo falso (*tò pseûdos*) y tal naturaleza, de donde —y de 'lo que es'— [deriva] la multiplicidad de las cosas, por lo cual también se afirmaba que es necesario hipotetizar algo falso, así como también los geómetras [hipotetizan] que es de un pie [de largo] la [línea] que no es de un pie, pero es imposible que esto sea así, pues los geómetras no hipotetizan nada falso"(*Met.* XIV 2, 1089$a_{20\text{-}24}$; cf. *Anal.Priora* I 41, 49$b_{34\text{-}37}$ y *Anal.Post.* I 31, 87$b_{35\text{-}37}$).

8.6.2.4.1 Dice Cherniss, al comentar este pasaje de *Met.* N, que, al afirmar Aristóteles que para Platón el "no-ser" es lo falso, está remitiendo sin duda al *Sofista* 237a. "Pero que la sentencia siguiente signifique que Platón mismo enunció la analogía entre la presuposición de *tò pseûdos* y el método de los geómetras, no es de ningún modo obvio. No puede rastrearse tal afirmación en Platón, quien, al contrario, habla de la relación entre las figuras usadas por el geómetra y su demostración exactamente a los mismos efectos que Aristóteles mismo (cf. *Rep.* 510d-e con *Anal.Post.* 77$a_{1\text{-}3}$)... La discusión de que la geometría deriva sus demostraciones de premisas falsas, sin embargo, es introducida en *Anal.Post.* 76b_{39}-77a_3 como la de una cierta gente que en el pasado... *atacó* el procedimiento geométrico en ese sentido; en *Met.* 998$a_{2\text{-}4}$ el argumento de que la geometría usa supuestos falsos de tal clase es explícitamente atribuido a Protágoras en su refutación de los geómetras".[52]

[52] H.Cherniss, *Aristotle's Criticism of Plato and the Academy*, New York, 2a. ed., reimpr. de la de 1944, 1962, p. 97-101.

8.6.2.5 Veamos ahora el texto en que Aristóteles nombra a Protágoras.

> "En efecto, no existen líneas sensibles tales como aquellas de que habla el geómetra; pues ninguna de las cosas sensibles es del modo [en que habla el geómetra], recta ni curva, y *el círculo es tocado por la tangente no en un [solo] punto*, sino tal como decía Protágoras al refutar a los geómetras" (*Met.* III 2, 997b_{35}-998a_4)

8.6.3 De las observaciones formuladas y el cotejo efectuado de textos surge, como corolario, que Aristóteles no ha hecho ninguna referencia crítica —en *Seg. Anal.* I 10— a Platón. Si podemos hallar en ese texto un rechazo a críticas hacia geómetras —como sucede en 8.4.1-3—, debemos pensar que la alusión es a Protágoras, o a sofistas o pseudo-filósofos del siglo IV que mantuvieran a ultranza la tesis de Protágoras.

8.7 Pero la comparación del pasaje platónico con el aristotélico no sirve sólo para aceptar o rechazar la tesis de Kurt von Fritz sobre la presunta crítica de Aristóteles a Platón.

En efecto, el geómetra habla de la línea que dibuja, explica Aristóteles, pero piensa en la línea que su dibujo sólo ilustra. No se trata de una cosa en sí, ciertamente, pero para el caso del geómetra es lo mismo: es una línea perfecta como tal, una línea ideal, y que sólo en el pensamiento puede ser concebida como realmente recta —aunque el dibujo nunca la presente así— y de un pie de largo (esta determinación resulta difícil de concebir en una pura idealidad, y parece ajena a la matemática; pero hay que asumirla como parte del ejemplo aristotélico, tal vez como concepción de una unidad de medida ideal).

Y si bien Aristóteles no le pide cuentas al geómetra acerca de cómo concibe la línea recta perfecta —como haría Platón—, distingue igualmente la línea dibujada de la línea pensada por el geómetra. Y califica con el nombre de *hypóthesis* la referencia del geómetra a la línea ideal. En ese sentido —y a pesar de que se trate aquí de proposiciones, no de términos— el uso del vocablo denota un enmascaramiento similar al que hallamos en Platón (*supra* 7.7). Detrás del dibujo o de las palabras pronunciadas hay, advierte Aristóteles, algo oculto, de índole ideal, y que es lo que tiene en mente el geómetra.

9 Vamos a trazar ahora una última comparación entre los aportes platónico y aristotélico a la axiomatización matemática, y extraeremos de allí nuestra conclusión.

9.1 La comparación que proponemos es la de la relación entre el Bien y las Ideas en *Rep.* VI-VII con la del nexo entre *koiná* e *ídia* en los *Segundos Analíticos*. Porque si bien Platón en ningún momento deja entrever que el Bien sea "lo universal" y las Ideas "lo particular" (como tampoco entiende a las Ideas como "universales" en relación con la multiplicidad de cosas particulares correspondientes a cada Idea; esto sólo se ve así desde la perspectiva de Aristóteles, no desde la platónica), es obvio que, así p.e. como la Idea de lo Bello es "común" a las cosas bellas sólo en el sentido de ser la *fuente* de la cualidad que esas cosas tienen de ser bellas, también la Idea del Bien —que no es una *ousía*, pero está por sobre todas las *ousíai*— es la *fuente* de la perfección de las Ideas, y en ese sentido, y sólo en ése, puede decirse que es "lo común" a todas ellas (siempre restringiéndonos al ámbito epistemológico y a Ideas de objetos matemáticos).

9.2 Hay una diferencia muy importante, aparte de las que más fácilmente saltan a la vista: los axiomas aristotélicos parecen fundamentar directamente la demostración matemática, en tanto que el Bien sólo indirectamente, a través de las múltiples Ideas (y dejando de lado otras distinciones, como decimos, tal como la de que Platón no articula las nociones —contenidas en las Ideas— en proposiciones de existencia o definiciones como hace Aristóteles).

9.2.1 ¿Es tal diferencia real? Dice Kurt von Fritz: "Aunque Aristóteles haya dicho que los axiomas son aplicados por analogía en las distintas ciencias, con ninguna palabra se indica en cuál tipo de *archaí* deben contarse las proposiciones de igualdad especiales, sin lo cual la aplicación de los axiomas de igualdad falla por su base" [53] Aristóteles, en efecto, dice que cada uno de los principios "comunes" —de los cuales pone como ejemplo la N.C. 3— "es útil en cuanto se lo aplica en el género que corresponde a la ciencia particular" (*supra* 8.2.1). Esto es lo que uno esperaría que se produjera en los principios "particulares" o *ídia*, pero lo que Aristóteles clasifica como tales es algo bien distinto. Los axiomas de igualdad se aplican en la geometría euclideana sólo en su forma más general, pero lo más fre-

[53] APXAI 75-76 = *GGAW* 400.

cuente es que su aplicación provoque dificultades (cf. 2.2.3-2.2.4), por la falta de una particularización disciplinaria de dichos principios.

9.3 Naturalmente, no se trata de convertir a Aristóteles en chivo expiatorio de las fallas axiomáticas de la geometría euclideana. Si nuestra tesis sobre la indicación platónica respecto de la particularización del principio supremo en principios particulares fuera correcta, lo menos que habría que decir es que Platón no fue suficientemente claro sobre el punto como para que hiciéramos a Aristóteles la imputación de no haberlo seguido o entendido.

9.4 Lo que cabe preguntar es si no le estamos atribuyendo excesiva importancia al papel de la filosofía —trátese de Platón o de Aristóteles o de ambos, y aun añadiendo nombres de filósofos— en la axiomatización matemática. Ya hemos visto que en Grecia clásica la relación entre filósofos y matemáticos fue mucho menos rígida que lo que podemos concebir hoy en día, con la mirada puesta en el divorcio existente entre filosofía y ciencia, y entre ciencias entre sí, y entre disciplinas filosóficas entre sí. Recordemos aquí sólo que también Eudoxo, el más grande matemático anterior a Euclides, sostuvo una "teoría de las Ideas".[54] No necesitamos pensar que el cuerpo entero de la matemática griega está influido por la filosofía. Pero la axiomatización euclideana evidencia la mano de la filosofía, personificada por Platón y Aristóteles.

ABREVIATURAS DE LAS NOTAS

K.v.Fritz, APXAI = "Die APXAI in der griechischen Mathematik", en *Archiv für Begriffsgeschichte* 1, 1955

K.v.Fritz, *GGAW* = *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlín-New York, W. de Gruyter, 1971

K.v.Fritz, *PTAM* = *Platon, Theaetet und die antike Mathematik*, Darmstadt, Wiss. Buchg., reimpresión con un apéndice, 1969

ZGGM = *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, ed. O.Becker, Darmstadt, Wiss.Buchg., 1965

[54] Cf. Kurt von Fritz, "Die Ideenlehre des Eudoxos von Knidos und ihr Verhältnis zur Platonischen Ideenlehre", en *Philologus* 82, 1927, p. 1-26.

A.Szabó, *AGM* = *Anfänge der griechischen Mathematik*, Munich-Viena, Oldenbourg, 1969
A.Szabó, *BGM* = *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht-Boston, D. Reidel, 1978, trad. A.M. Ungar, supervisada por el autor
AHES = *Archiv for History of Exact Sciencies*