El gnomón y el esclavo

César GONZÁLEZ OCHOA

RESUMEN: El descubrimiento de los números irracionales introduce una ruptura en la visión de mundo del hombre de la Grecia antigua. En este trabajo se analiza brevemente la época posterior a ese descubrimiento, tal como incidentalmente aparece en el *Menón*, en especial donde Sócrates interroga a un joven esclavo. De manera más extensa se describe la época anterior, pero no directamente, sino por medio de la descripción de un instrumento de múltiples funciones: el *gnomón*.

* * *

ABSTRACT: The discovery of irrational numbers introduces a rupture in the way ancient Greeks conceived the world. This article briefly starts analyzing the period after such discovery was made, as it incidentally appears in *Meno*, especially where Socrates questions a young slave. Then, although not directly, the author extensively describes the previous period by examining an instrument of multiple functions: the *gnomón*.

PALABRAS CLAVE: aritmética griega, astronomía griega, gnomón, matemáticas, platón.
RECEPCIÓN: 13 de octubre de 2004.
ACEPTACIÓN: 13 de enero de 2005.

El gnomón y el esclavo

César González Ochoa

Nuestra visión de mundo tiene como uno de sus soportes el sistema pitagórico de ideas, cuyos cimientos son básicamente el número y el orden. La idea de orden funciona como base fundamental, trátese del orden matemático, del orden musical, del orden del cosmos o del orden social.

Esto del orden no es, claro está, exclusivo de nuestra sociedad, pues ninguna ha podido idear un estilo de vida basado en el caos; en todas ha sido esencial la idea de cosmos, entendido como alguna regla que ordena el universo. No se puede generalizar el hecho de que todas las culturas se basan en el número, puesto que se pueden encontrar algunas cosmologías que no tienen una base numérica; pero hay muchas otras, las más, tanto tradicionales como modernas, que ponen de manifiesto que vivimos en un universo matemático. En variadas interpretaciones y combinaciones diferentes, los números parecen ser una base suficiente para cualquier cosmología.

Uno de los descubrimientos atribuidos a Pitágoras es que la armonía musical está basada en estrictas razones matemáticas entre números; esta idea se extendió de manera tal que los pitagóricos consideraban que la esencia de todo existente podía ser expresada numéricamente. La observación de los movimientos regulares en el cielo dio por resultado la noción de armonía de las esferas y, con ella, la convicción de que el cosmos en su totalidad estaba en relación estrecha con el número. Para los pitagóricos, el cosmos es isomorfo con las matemáticas; de allí su convicción de que todo se puede expresar por medio de números enteros o de fracciones racionales (es decir, fracciones producidas por la división entre dos enteros). En el sistema pitagórico y en el mundo de la antigua Grecia no hay lugar para los números irracionales; es ésta la razón de que el descubrimiento de que la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal, descubrimiento atribuido a Hipaso, no pueda ser expresada por enteros haya hecho estremecer la visión pitagórica del mundo.

Irracionalidad e inconmensurabilidad —el hecho de que una longitud no pueda usarse para medir otra— vienen juntas. Si damos el valor fijo y racional de uno, de la unidad, al lado de un cuadrado o al diámetro de un círculo, entonces la diagonal del cuadrado o la circunferencia del círculo no pueden ser medidos por el lado o por el diámetro; es decir, ambas longitudes tendrán valores dados por números no racionales, es decir, son inconmensurables. Éste es el punto en que la aritmética y la geometría se separan, puesto que nunca podremos conocer numéricamente la diagonal ni la circunferencia; sin embargo, desde el punto de vista de la geometría, ambas son absolutamente cognoscibles. El número se considera como una relación formal, y este tipo de relación formal se denomina función. La raíz cuadrada de dos, que es el valor de la diagonal del cuadrado de lado unitario, es el número funcional de un cuadrado; π, que es el número de veces que cabe el diámetro en la circunferencia, es el número funcional de un círculo. La geometría se interesa en estas y otras funciones “irracionales” por la simple razón de que muestran gráficamente un nivel de experiencia universal e invariable. Las funciones irracionales son una puerta a la más alta realidad del número, y muestran que el número es sobre todo una relación; sin importar qué cantidades se apliquen al lado del cuadrado o al diámetro del círculo, la relación permanece invariable porque, en esencia, este aspecto funcional del número no es ni grande ni pequeño, ni finito ni infinito: es universal. Así, en el concepto de número hay un poder particularizador definido, finito, y también un poder sintetizador universal.

Si se observa con cuidado la visión de mundo de la antigüedad, pueden distinguirse dos épocas perfectamente diferenciadas que corresponden a un antes y un después del descubrimiento de los irracionales. No es éste el lugar para incursionar en la historia de las matemáticas griegas, de la cual existen trabajos brillantes que estudian sobre todo la segunda época. Aquí se tratará de esta segunda época de manera breve, tal como aparece de manera incidental en uno de los diálogos platónicos, el *Menón*, en especial la parte donde Sócrates interroga a un joven esclavo. Más extensamente será tratada la primera, pero no de manera directa, sino por medio de la descripción de un instrumento de múltiples funciones (o tal vez de varios instrumentos que llevan el mismo nombre): el gnomón.

Una fuente privilegiada para ello es el tratado de Vitruvio, *Los diez libros de arquitectura*, que constituye una síntesis de obras griegas con las que ya no contamos. Según Vitruvio (I, 3, 1), un tratado de arquitectura debe contener tres partes: *aedificatio*, *gnomonice* y *machinatio*, o “construcción, gnomónica y maquinaria”, como traduce Ortiz y Sanz en su edición de Vitruvio de 1787.[1] De los diez libros que componen su obra, Vitruvio dedica los siete primeros a la *aedificatio;* el libro ocho habla de hidráulica, por lo que puede considerarse como parte de la misma *aedificatio;* el libro diez toca temas referidos a la *machinatio*, y el noveno constituye una exposición de la *gnomonice*.

En sentido estricto, la gnomónica es la ciencia del uso del gnomón, y por gnomón se conoce, desde la antigüedad, el poste vertical cuya sombra indica la posición del sol; la longitud y la dirección de la sombra proporcionan los datos necesarios para saber la hora del día. Por ello, la gnomónica es también el estudio de los relojes de sol, o cuadrantes solares, y, por extensión, de todo instrumento destinado a la medida

[1] *Los diez libros de arquitectura* (*De Arquitectura*), trad. y com. José Ortiz y Sanz, Madrid, 1787. Edición facsimilar: Madrid, Akal, 1992.

del tiempo. Cuando Vitruvio anuncia en el prólogo del noveno libro que allí tratará de la gnomónica, explica: “expondré sus descubrimientos a partir de los rayos del sol en el universo gracias a las sombras del gnomón, y los procesos según los cuales esas sombras crecen o disminuyen”.[2]

Uno de los principios básicos de la gnomónica es que la longitud de la sombra del gnomón varía de acuerdo con la latitud del lugar. Plinio atribuye este descubrimiento a Anaxímenes, mientras que Diógenes Laercio lo acredita a Anaximandro; en los dos casos podría datarse en la primera mitad del siglo VI a. C.; sin embargo, Heródoto dice que los griegos aprendieron el uso del polo[3] y del gnomón de los babilonios, de la misma manera que de ellos tomaron la división del día en doce partes.[4] Vitruvio toma como uno de los principios el hecho de que la sombra varía y de que “también son grandes las diferencias en los trazos de los relojes cuando se pasa de un lugar a otro” (IX, 1, 1).[5]

Las observaciones del movimiento del sol no se inician en la época griega, sino que se han realizado desde tiempos muy

---

[2] Vitruve, *De l’architecture,* libro IX, intr., trad. y nts. Jean Soubiran, París, “Les Belles Lettres”, 1969.

[3] El polo “era una variedad del gnomón, de empleo menos generalizado. Estaba concebido como este último instrumento, pero no medía el tiempo por la longitud de la sombra proyectada por el estilo, sino por la dirección que daba la traslación del sol”. C. Schrarer, nota 393 a Heródoto, *Historias,* Madrid, Gredos (Biblioteca Clásica Gredos, 3), 1992.

[4] Heródoto, *Historias*, II, 109, trad. y nts. Carlos Schrader, op. cit.

[5] El texto original dice: “Itaque longe aliter distant descriptiones horologiorum locorum mutationibus”. La dificultad de la palabra ‘descriptiones’ llevó a Ortiz y Sanz a traducir simplemente como “descripciones”, lo que anula el hecho de que no se trata de describir el reloj de sol sino de trazarlo para su construcción. El traductor al inglés de la edición de la Loeb, deja el pasaje ambiguo cuando traduce: “Therefore the designs of dials vary widely with change of place” (Vitruvius, *On architecture,* trad. Frank Granger, Cambridge, Harvard University Press, The Loeb Classical Library, 1970). En cambio, Soubiran, el traductor del libro IX de la edición de “Les Belles Lettres”, conserva ese sentido al traducir: “Aussi les différences sont elles très grandes dans las épures d’horloges quand on passe d’un lieu à un autre”.

remotos. Según Kuhn, desde fines del segundo milenio antes de nuestra era, babilonios y egipcios ya habían realizado observaciones sistemáticas de este fenómeno (sin embargo, no se compromete totalmente, puesto que añade que esto se hacía “quizás en época muy anterior”). Para ello, sigue diciendo,

> concibieron un reloj de sol primitivo consistente en una varilla graduada, el gnomón, que se levanta verticalmente sobre un terreno liso y horizontal. Puesto que la posición aparente del sol, la extremidad del gnomón y la extremidad de su sombra están alineadas durante todos y cada uno de los instantes de un día despejado, la medición de la longitud y de la dirección de la sombra en un instante dado determinan completamente la dirección del sol.[6]

Si la sombra es corta, el sol estará muy alto, y viceversa; si está orientada hacia el este, el sol estará en el oeste. A través de la práctica repetida de estas observaciones se logró sistematizar un conjunto de conocimientos sobre la variación anual y cotidiana de la posición del sol.

La figura uno muestra un hemisferio del globo terrestre; en el punto A, situado a una latitud α, se levanta un gnomón AB. Por la distancia del sol a la tierra, puede considerarse que los rayos llegan paralelos a todos los puntos en el momento del equinoccio. El rayo solar, paralelo al ecuador, al incidir sobre el gnomón, proyecta una sombra AC. Como el ángulo ABC es igual a α, y considerando como unitaria la longitud del gnomón, la longitud de la sombra se determina por una simple operación aritmética: AC = tangente de α.

En cualquier otro momento distinto al de los equinoccios, los rayos del sol no son paralelos al ecuador. Se dice que el rayo de sol está en el equinoccio para referir el momento en que el astro se encuentra en el ecuador celeste, es decir, a una

---

[6] Thomas S. Kuhn, *La revolución copernicana. La astronomía planetaria en el desarrollo del pensamiento occidental,* Barcelona, Planeta Agostini, 1994, p. 37.

latitud de cero grados. La introducción de la noción de ecuador celeste requiere una discusión. Se entiende por esfera celeste la esfera infinitamente lejana sobre la cual vemos proyectadas las estrellas; esa esfera celeste, "junto con las estrellas, aparentemente cumple una rotación diaria alrededor del eje del mundo (que pasa por el polo norte y el polo sur de la esfera celeste). Perpendicularmente al eje del mundo, se sitúa el ecuador celeste".[7] El sol, como cualquier otra estrella, recorre sobre la esfera celeste una circunferencia paralela al ecuador celeste en el transcurso de un día; al pasar por el meridiano, la estrella alcanza su máxima altura. Como se observa en la figura dos, el horizonte es el plano tangente a la tierra en el lugar del observador; el cenit corresponde a la dirección local de gravedad, es decir, de la plomada, perpendicular al horizonte. La altura del polo celeste sobre el horizonte es igual a la latitud geográfica, α en este caso.

Desde un punto de vista heliocéntrico, el movimiento aparente anual del sol en la esfera celeste se debe a la revolución de la tierra en una órbita casi circular alrededor del sol. El plano del movimiento orbital intersecta la esfera celeste en un círculo máximo denominado eclíptica, que corta al ecuador celeste bajo un ángulo de 23 grados y 27 minutos, ángulo que se conoce como oblicuidad de la eclíptica. Dicho en otros términos, la eclíptica representa la intersección de la esfera celeste y el plano de la órbita terrestre. Los antiguos habían calculado el valor de ese ángulo de manera aproximada; Vitruvio recoge uno de esos cálculos cuando dice:

> para encontrar las huellas de los rayos solsticiales, tomar sobre el círculo meridiano, de ambos lados del rayo equinoccial, un ángulo igual a una decimoquinta parte de la circunferencia: 360/15 = 24. Este ángulo representa la desviación entre las posicio-

---

[7] A. Unsöld, *El nuevo cosmos*, México, Siglo XXI, 1977, p. 24.

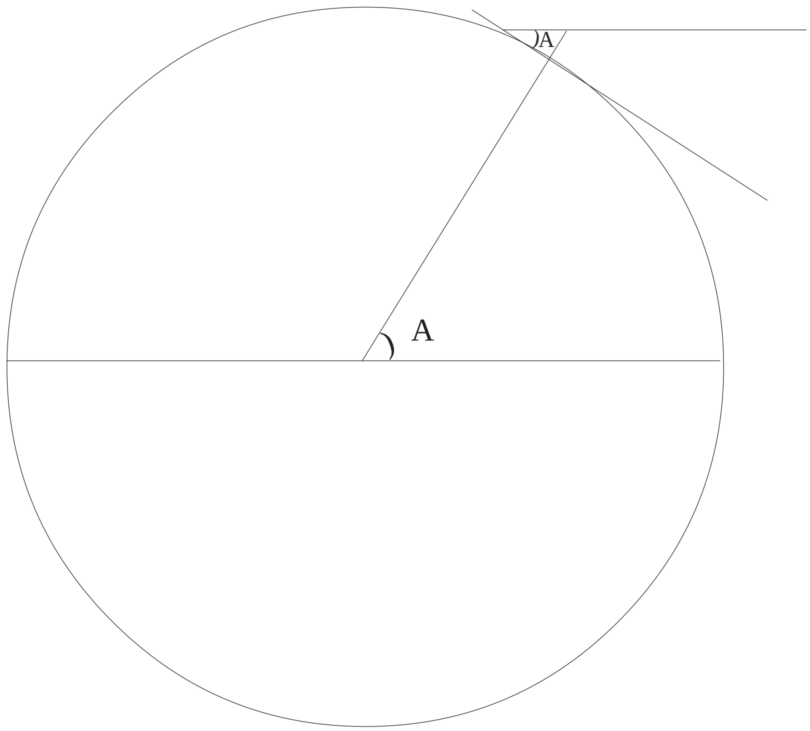


Figura 1

nes del sol en el solsticio y en el equinoccio, es decir, la oblicuidad de la eclíptica.[8]

Las órbitas de los planetas siguen en el cielo el camino de la eclíptica, en una zona que se extiende a ambos lados de esa línea y que se denomina zodiaco. La faja celeste del zodiaco es de 18 grados de ancho y se centra en la eclíptica; desde la antigüedad, el zodiaco se ha dividido en 12 zonas iguales de 30 grados. El nombre de zodiaco deriva del término griego *zodion*, formado de *zoon* y *odos*, camino de animales (o de seres vivos en general).

La posición del sol en el momento del equinoccio de primavera se denomina punto vernal. Los antiguos ya sospechaban que el punto vernal no estaba fijo en el ecuador celeste. Por el siglo IV, Hiparco calculó que ese punto se adelantaba cada año un poco menos de 50 segundos de arco.[9] Esto quiere decir que el polo celeste completa un círculo en unos 25 800 años alrededor del polo de la eclíptica. De acuerdo con Unsöld, "el eje de la tierra describe en 25 800 años, alrededor del eje de la órbita terrestre, un cono cuyo ángulo de abertura es de 23º 27' ".

Las doce constelaciones del zodiaco crean un cinturón imaginario en los cielos, y el círculo formado por esas constelaciones está casi alineado con el ecuador celeste. Para un observador de nuestra época, el sol, en el primer día de la primavera, aparece localizado entre las constelaciones de Piscis y Acuario, pero si se observan sucesivos equinoccios vernales, se

---

[8] J. Soubiran, "Introduction a Vitruve", libro IX, *De l'architecture*, op. cit., pp. 222-223.

[9] El comentarista de Vitruvio, Soubiran, se equivoca al establecer esa variación como cien veces menor; según él, "Quoique les Anciens n'aient pas soupçonné la lente variation (0.476" par an, soit 1º tous les 7200 ans environ) de cette obliquité [...] ils ont adopté une valeur de 24º que etait fort proche de la verité (15' d'erreur par excès seulment (p. 223)". Si así fuera, el gran año sería de poco más de dos millones y medio de años.

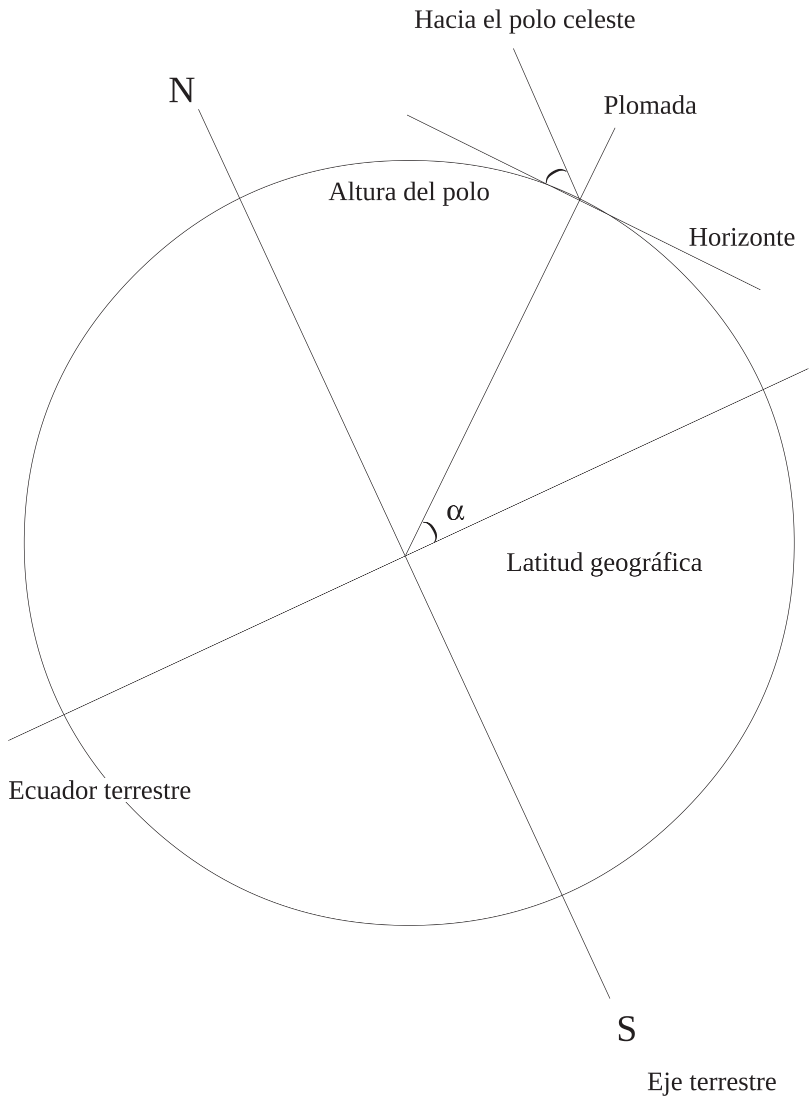

Hacia el polo celeste
N
Plomada
Altura del polo
Horizonte
α
Latitud geográfica
Ecuador terrestre
S
Eje terrestre

Figura 2

observa un lento movimiento hacia atrás de la posición aparente del sol en el zodiaco. Es esto lo que se conoce como precesión de los equinoccios y ha originado que, desde la época caldea y babilonia hasta la griega, el punto vernal se haya desplazado de la constelación de Aries a la de Piscis, y desde entonces hasta nuestra época, a la de Acuario. Se requieren aproximadamente unos 2150 años para el tránsito del sol por cada una de las constelaciones del zodiaco. Puede decirse que los efectos gravitatorios combinados del sol, la luna y los planetas del sistema solar en la curvatura ecuatorial son la causa de que el eje de la tierra oscile en el sentido de las manecillas del reloj, y esa oscilación completa un ciclo en 25 800 años. A este ciclo se le llamaba el gran año o el año platónico.[10]

El plano del sol, es decir, la eclíptica, cruza el ecuador cada año el 21 de marzo, el equinoccio vernal. En el punto en el cual el plano del sol cruza el ecuador, el sol, en el momento del medio día, está directamente encima del ecuador, y un gnomón localizado en ese punto no produce sombra. En el ciclo del gran año, la eclíptica intersecta el ecuador celeste cada año un poco hacia el oeste. Este desplazamiento, es decir, la precesión de los equinoccios, es la causa de que el sol sólo cruce por el mismo punto 25 800 años después, en su camino alrededor del ecuador celeste.[11]

---

[10] Platón hace una referencia al gran año en *Timeo,* 39d; cfr. *Oeuvres completes,* t. X, *Timée-Critias*, trad. A. Rivaud, París, “Les Belles Lettres”, 1970.

[11] Algunos datos extra pueden ayudar a comprender el fenómeno de la precesión de los equinoccios. Si se prolonga en la actualidad el eje de la tierra como una línea imaginaria, ésta casi se encontrará con la estrella Polar; en realidad, la máxima alineación con esa estrella se alcanzará en el año 2095. Pero el ciclo del año platónico hace que la línea imaginaria se vaya desplazando de manera circular, de manera que en el año 7500 coincidirá con la estrella Al Deramín; de aquí a unos 13000 años, coincidirá más o menos con Vega; alrededor del año 21600 lo estará con Alfa Draconis, y en el 27900 cerrará el círculo para coincidir otra vez con la Polar.

Después de esta breve excursión por los movimientos aparentes del sol, podemos regresar a la argumentación acerca del gnomón. Tanto la longitud como la dirección de su sombra varían a lo largo del día; la mayor longitud es a la hora de la salida y la puesta del sol, y sus direcciones son opuestas en esos momentos del día. La sombra se desplaza de forma gradual y construye una figura en forma de abanico (este comportamiento es el normal en todo el mundo de la antigüedad). La forma del abanico no permanece igual, sino que se modifica en el transcurso de los días, aunque un rasgo se mantiene: cuando la sombra es de longitud más corta (lo que ocurre al medio día), siempre está orientada en la misma dirección. Esta simple regularidad

> proporciona dos marcos de referencia fundamentales para todas las restantes mediciones astronómicas. La dirección permanente tomada por la sombra más corta en todos y cada uno de los días define el norte y, en consecuencia, determina los restantes puntos cardinales. El instante en que la sombra tiene menor longitud define un punto de referencia en el tiempo, el medio día del lugar, y el intervalo de tiempo que separa en un lugar dado dos mediodías consecutivos define una unidad de tiempo fundamental, el día solar.[12]

Según muestra la figura tres, tanto el punto de nacimiento del sol como la longitud de la sombra del gnomón en el medio día, así como el número de horas de luz varían de acuerdo con las estaciones. El solsticio de invierno es cuando el sol sale y se pone más al sur de los puntos este y oeste; es el día más corto del año y es entonces cuando la sombra del gnomón al medio día es más larga. A partir de ese día, la salida y puesta del sol se desplaza hacia el norte, y la longitud de la sombra decrece. En el equinoccio de primavera, el sol sale por el este y se pone por el oeste, y el día y la noche tienen la misma

---

[12] Th. S. Kuhn, op. cit., p. 32.

duración. Después de ese día, los puntos de salida y puesta siguen desplazándose hacia el norte y la duración del día aumenta hasta llegar al solsticio de verano, cuando el sol sale y se pone en el punto más extremo hacia el norte y cuando la sombra a medio día es más corta. Desde este momento, los puntos de salida y puesta del sol se desplazan hacia el sur, y crece la longitud de las noches hasta terminar en el equinoccio de otoño. Todo este movimiento trae una tercera consecuencia de gran importancia: la longitud total del ciclo, es decir, el intervalo que separa dos equinoccios de primavera, por ejemplo, define la unidad básica del calendario, el año, de la misma manera que el movimiento cotidiano del sol define el día.

Se ha descrito el cuadrante solar como reloj y como calendario. En realidad la segunda descripción es más aproximada, pues como reloj no es confiable ya que las horas varían en duración, puesto que, al no tener los días la misma longitud en verano que en invierno, se dividían igualmente en doce horas. Otra razón para pensarlo menos como calendario que como reloj es que nadie tenía una necesidad real de saber la hora y, por tanto, tenía muy poca utilidad para medir las horas. Sin embargo, era un poderoso instrumento de búsqueda, pues mostraba un modelo del mundo: sea en días largos o cortos, daba siempre la indicación del medio día y, gracias a la longitud de su sombra, indicaba equinoccios y solsticios, así como la latitud del lugar. Podría decirse que, si no fuera por lo anacrónico del término, más que un reloj se trataba de un observatorio.

El gnomón, considerado como un estilete, es análogo a una pluma: la luz del sol escribe sobre la tierra o sobre el mármol del cuadrante solar, hace un dibujo que representa las formas y lugares reales del universo, y lo hace por la mediación de la punta de dicho estilete o del gnomón. Esta analogía permite traer a escena las enseñanzas de Platón: cuando éste habla del conocimiento, habla del camino que va de las sombras a la luz que las induce, y de ésta a su fuente única. Es lo que hace el

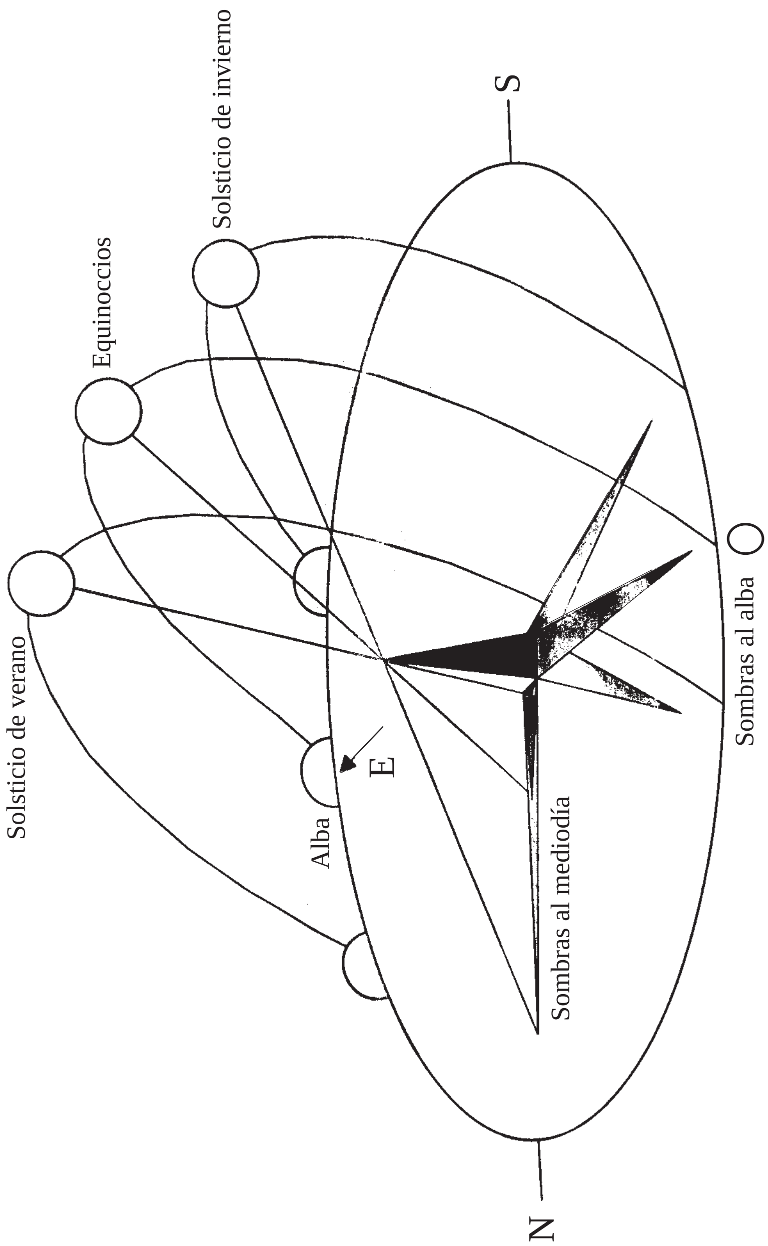

Solsticio de invierno
Equinoccios
Solsticio de verano
S
N
E
Alba
Sombras al mediodía
Sombras al alba

Figura 3

astrónomo: obtiene enseñanzas acerca de la longitud y la posición de la sombra, de la marca oscura. Ir de las sombras a la luz y de las imágenes producidas o proyectadas a su modelo, éstas son lecciones comunes a la astronomía griega y a la teoría platónica del conocimiento.

El cálculo de latitudes según la sombra del sol en los solsticios y equinoccios es la primera relación entre la astronomía y la geografía, lo cual hizo posible a Ptolomeo, y antes de él, a Hiparco, la construcción de las llamadas tablas de cuerdas, las cuales eran unas largas listas de relaciones entre la medida de los lados de triángulos rectángulos y la de sus ángulos; en ellas puede leerse el nacimiento de la trigonometría. Uno de los primeros triunfos de esta relación entre astronomía y geografía es el cálculo realizado por Eratóstenes (s. III a. C.): colocó un gnomón en un lugar de Egipto llamado Syene (hoy Aswan), situado en el trópico de cáncer, cerca de la primera catarata del Nilo; en el solsticio de verano, a medio día, observó que los rayos del sol no producían sombra, es decir, caían verticalmente. Ese mismo día y a la misma hora, midió un ángulo de un poco más de siete grados con respecto a la vertical en otro gnomón situado en Alejandría, a unos 800 kilómetros al norte de la otra ciudad (y que Eratóstenes pensaba que estaba en el mismo meridiano). Como el ángulo medido era más o menos la quincuagésima parte de un círculo, bastaba multiplicar por cincuenta la distancia entre las dos ciudades para obtener la longitud total del meridiano terrestre: unos cuarenta mil kilómetros, valor muy cercano al hoy reconocido. Resultado grandioso obtenido con medios mínimos.

Literalmente, gnomón significa “que sabe discernir, experto, buen conocedor, capaz de distinguir; también regla, norma de conducta”.[13] Liddell y Scott lo definen como “one that knows or examines, an interpreter, discerner”.[14] Por su parte,

---

[13] *Diccionario griego-español*, Instituto de Filología, t. IV, Madrid, CSIC, 1994.

[14] Henry George Liddell y Robert Scott, *A Greek-English Lexicon*, Oxford, Clarendon Press, 1978.

el término “gnomónico” se define como “judging by rule, fit to judge, skilled in a thing”. Esto quiere decir que, además de ser un objeto, el gnomón es lo que discierne, lo que regula; el gnomón conoce, distingue; de allí que no sólo haya sido considerado como un objeto sino que se le asignaban características que ahora les atribuimos sólo a los sujetos.

Como objeto, el gnomón da resultados asombrosos: proporciona la latitud, indica la fecha de equinoccios y solsticios; intercepta la luz del sol y deja su huella en la arena o en el mármol del cuadrante solar, de la misma manera que el escriba lo hace sobre la página en blanco. Lo sorprendente de esa manera de considerarlo es que no se requiere la presencia de un ser humano para indicar esa información, sino que funciona solo, sin ninguna intervención humana, sin sujeto motor; el gnomón “conoce”.

Pero hablar aquí de conocimiento no quiere decir que lo identifiquemos con lo que ahora designamos con ese término; se trata de otra *episteme* o de otro *logos;* es decir, de otra razón. Michel Serrès hace una observación interesante que convendría desarrollar:[15] dice que las ciencias modernas sólo hablan de conocimiento cuando un sujeto está presente, con su cuerpo, con sus sentidos y con ciertas destrezas que le permiten percibir, agudizar sus sensaciones. Desde Galileo, no podemos ya entender que los griegos hayan tenido una astronomía sin instrumentos, puesto que no existía un lugar de algo que pudiera llamarse punto de vista; se trataba de una ciencia sin sujeto. Los griegos no se preocuparon de algo que para nosotros es un problema: la cuestión de quién conoce. Los modernos sabemos que, para usar un telescopio, no sólo se requiere de un desarrollo tecnológico que permita la existencia de un dispositivo de ese tipo, sino que también es necesario que se haya desarrollado la noción de sujeto que observa, de que alguien se sitúe en uno de sus extremos para

[15] Cfr. *Éléments d’histoire des sciences*, París, Bordas, 1986.

contemplar, observar, calcular y ordenar los planetas. Los griegos, al usar el gnomón, no se hacían preguntas como dónde situar el ojo, si en la fuente de luz, en el extremo de la varilla o en la sombra; éstos son problemas modernos. El astrónomo griego no observa o conoce como nosotros; el acto de ver no ocupaba el mismo lugar que ocupa ahora en el acto de conocer.

Se ha mencionado el símil entre el gnomón y la pluma del escriba: la tinta sobre la página es la sombra que produce el indicador al interceptar la luz del sol y que deja marcas sobre la arena o sobre el mármol, es decir, sobre el mundo, como si éste se conociera a sí mismo. Para los griegos, el gnomón conoce, discierne, escribe sobre la superficie, comprende. Es inteligente en el sentido literal del término, porque, de entre muchas situaciones dadas, escoge una; así discierne y comprende. Como un objeto, simple receptor pasivo, recoge la luz; como ente activo, escribe o dibuja un límite entre luz y sombra; como ser inteligente, muestra un modelo del cielo. Hablar del gnomón como teórico presupone tomar la antigua definición de "teoría": para los griegos significa "conocimiento especulativo considerado con independencia de toda aplicación";[16] θεωρία significa "acción de ver, de mirar, contemplación, examen; observación, meditación, especulación". Aparte de los significados comunes de "teoría, estudio", θεωρία equivale a "teatro, estrado para los espectadores". El diccionario de Liddell y Scott define θέατρον como "place for seeing; of the mind: contemplate, consider; observe; speculate, theorize".[17] "Teatro", por su parte, que en español viene del latín *theatrum*, es en griego θέατρον, definido también por estos autores como "place for seeing". Finalmente,

---

[16] Martín Alonso, *Diccionario medieval español* (2 v.), Universidad Pontificia de Salamanca, 1986.

[17] Florencio Sebastián Yarza, *Diccionario griego-español*, Barcelona, Sopena, 1972; H. R. Liddell y R. Scott, *A Greek-English Lexicon*, Oxford, Clarendon Press, 1968 (1843).

"teorema", en griego θεώρημα, también significa "sight, spectacle; object of contemplation".

El gnomón no es una herramienta en el sentido como lo es un bastón que prolonga el alcance del brazo o de una lente que prolonga el alcance de la vista; sigue siendo un artefacto, permanece como un objeto entre objetos, entre el sol y la plancha de mármol; permanece como una cosa construida pero convertida en inteligente por su localización en un lugar singular del mundo que pasa a través de ella para reflejarse sobre él mismo. El mundo se refleja en el cuadrante solar y nosotros, espectadores, participamos de ese acontecimiento porque nosotros también hacemos sombra, somos también gnomones.

Según Diógenes Laercio, Tales midió la altura de las pirámides de Egipto utilizando su propia sombra al observar el momento del día en que ésta era igual a su altura.[18] Plutarco dice que la altura de la pirámide se relaciona con la longitud de su sombra de la misma manera en que la altura de cualquier objeto vertical mensurable se relaciona con el tamaño de la suya en el mismo momento del día. Al establecer una relación entre la sombra de la pirámide y la de una varilla o de un bastón, o con su propia sombra, Tales enuncia la constancia de una forma, aunque existan variaciones en el tamaño. Pirámide, bastón, cuerpo humano, todos ellos perpendiculares o normales al horizonte, son gnomones; todos pueden, a la hora del mediodía, fijar el meridiano y, sobre éste, indicar los solsticios y equinoccios. Para lograr estas funciones, tanto la pirámide como la varilla o el propio Tales, como paseante inmóvil que contempla la luz apical, tienen que ser equivalentes. Cualquier cosa vertical puede ser el eje de un observatorio

[18] Diógenes Laercio cita a su vez otra fuente; dice que Tales "fue a Egipto y estuvo un tiempo con los sacerdotes. Jerónimo nos informa que midió la altura de las pirámides por medio de su sombra, tomando la observación en el momento en que nuestra sombra es de la misma longitud que nosotros mismos". Diogenes Laertius, *Live of eminent philosophers*, trad. R. D. Hicks, Cambridge, Harvard University Press, The Loeb Classical Library, 1972, I, 27.

tal, que habla de los primeros modelos del mundo de nuestros antepasados. La equivalencia de los gnomones alude, a fin de cuentas, a la equivalencia de triángulos: los rayos del sol son líneas rectas, las sombras son límites, las órbitas son círculos y las marcas impalpables en el momento de solsticios y equinoccios son puntos; todo el problema del origen de la geometría se resuelve en el paso de un rayo de sol por ese poste, cuyo nombre dice que conoce. En su comentario a la segunda definición del segundo libro de Euclides, Thomas Heath describe el gnomón como "una cosa que permite a otra cosa ser conocida, observada o verificada". En esa cosa, o gracias a ella, en el lugar que ocupa, el mundo muestra el conocimiento.

Como el eje del cuadrante solar está situado de manera perpendicular al plano, la expresión antigua "a la manera del gnomón" significaba a 90º, según un ángulo recto, es decir, a plomo. Por ello, si el término gnomón tenía como una de sus acepciones la de regla entendida como norma, también significaba regla en un sentido de herramienta geométrica, o escuadra. No es extraño, por tanto, que Euclides llame "gnomón" a la figura complementaria a un paralelogramo dado, de manera que su adición o sustracción configure otro paralelogramo semejante. Dice además Euclides que el gnomón es ese complemento de un cuadrado que los carpinteros llaman escuadra, palabra de oficio que describe perfectamente la extracción de un cuadrado.[19] Según se aprecia en la figura cuatro, el cuadrado interior es semejante al exterior, y se obtiene el segundo por la adición del gnomón al primero. Esto nos conduce a la noción de aritmética geométrica de los pitagóricos; ellos llamaban gnomón al complemento de los números cuadrados

[19] Dice Euclides literalmente en la definición 2 del segundo libro: "En toda área de paralelogramo llámese gnomón a uno cualquiera de los paralelogramos situados en torno a su diagonal junto con los dos complementos", *Elementos*, trad. M. Luisa Puertas Castaños, Madrid, Gredos (Biblioteca Clásica Gredos, 155), 1991, p. 265.

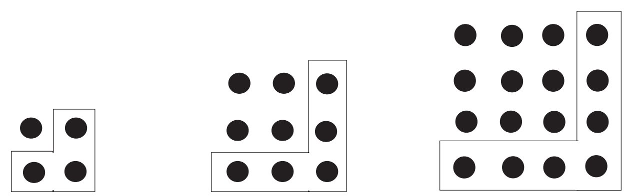
expresados en números impares. La figura cinco ilustra que 3 es el gnomón de 4, 5 el de 9, 7 el de 16, etcétera.

En la definición de Euclides, los números impares forman la escuadra alrededor del cuadrado interior y reproducen indefinidamente otro cuadrado externo semejante al primero. Con estos esquemas se pueden producir los números triangulares, pentagonales, etcétera, lo cual no vamos a hacer aquí. Teón de Esmirna los llama números gnomónicos.

Figura 4

Así, de eje del cuadrante solar, el gnomón pasa a ser escuadra; en ambos casos se trata de un artefacto: el primero sirve para dibujar sobre la arena algunos puntos singulares relativos al sol; el segundo sirve para dibujar sobre la página. En los dos casos se trata de formas complementarias que reproducen formas geométricas que crecen y decrecen de tamaño sin perder su similitud. En Egipto, el gnomón hace que Tales descubra la similitud, o, más bien, el crecimiento gnomónico, pues el triángulo reducido formado por el bastón y su sombra es similar al formado por la pirámide y su sombra. No podemos entrar aquí, por motivos de espacio, a la noción de crecimiento gnomónico, la cual requiere un análisis detallado. Al poner en relación una serie de formas, el gnomón se define como una ley, que puede formularse de múltiples maneras, por ejemplo: si se añade un número impar a un número cuadrado, el resultado es también un cuadrado; o: si se yuxtapone a un paralelogramo dado un complemento, el resultado es un paralelogramo semejante. Se trata de una ley de construcción, de una regla que genera la serie.

El gnomón fue usado ampliamente hasta la época alejandrina;[20] tal vez fuera más prudente decir que antes del siglo IV ya había caído en desuso gracias al predominio de un nuevo tipo de matemática sobre la antigua concepción pitagórica. Un indicio para esta afirmación estaría en un diálogo de juventud de Platón, el *Menón*. En uno de sus pasajes, Sócrates interroga a un esclavo para demostrarle a Menón que todo conocimiento es sólo una reminiscencia; para ello toca un problema geométrico, el de la duplicación del cuadrado, es decir, de cómo construir un cuadrado que tenga el doble de superficie del original.[21]



$1^2 + 3 = 4$ $2^2 + 5 = 9$ $3^2 + 7 = 16$

Figura 5

Precisamente, el esclavo encarna el punto de vista de la matemática pitagórica, según se verá a continuación. Sócrates parte del dato de que el lado del cuadrado original mide dos pies de longitud; por tanto, éste tiene una superficie de cuatro pies cuadrados,[22] y el problema consiste en investigar cuántos pies debe tener un nuevo cuadrado cuya superficie sea el

[20] Nota de C. Schrader, en Heródoto, *Historias*, Madrid, Gredos (Biblioteca Clásica Gredos, 3), 1992.

[21] Pl., *Men.*, 82b-85c, en Platon, *Oeuvres complètes*, t. III, 2ª parte, *Gorgias, Ménon,* trad. A. Croiset, París, "Les Belles Lettres", 1974.

[22] Sin embargo, como los griegos no tenían esa noción de cuadrado de unidades lineales, el texto dice sólo cuatro pies.

doble del primero. Consideremos un cuadrado cualquiera con una superficie dada; el problema es construir otro que tenga una superficie igual al doble de la del primero. Para encontrarlo, se tienen que prolongar los lados del primero; con ello nos topamos con el gnomón, la forma de la escuadra, en la cual lo vacío es el primer cuadrado, mientras que la escuadra es el suplemento que es necesario añadir para tener el cuadrado deseado. Es decir, duplicar el cuadrado es construir la escuadra. Así es como el esclavo comienza a resolver el problema, pero, como se muestra en el diálogo, la solución correcta sólo aparece cuando se deja atrás esta forma de razonar.

El esclavo, con la noción de gnomón como referencia, que es a la que remitirían sus recuerdos, razona que, para resolver el problema, bastaría solamente prolongar los lados o, lo que es lo mismo, sobreponer una escuadra (un gnomón) al cuadrado inicial, y que la suma de éste y de la escuadra daría el resultado. En otras palabras, que la solución del problema sería por medio de la construcción de esa escuadra. Dice, con ese razonamiento elemental, que el lado del nuevo cuadrado debía ser de cuatro pies, pero Sócrates le hace ver que un cuadrado con ese lado tiene un área de 16 pies, y que el problema establece que se debe buscar un cuadrado de ocho pies de superficie.

Los errores del esclavo se explican por la referencia al gnomón: por un lado, la escuadra, pero también la tabla pitagórica que muestra en sus lados los números impares y la serie de los enteros, y en su diagonal a los cuadrados perfectos. El esclavo salta de dos, el origen, a cuatro, y después a tres: usa sólo números enteros, a la manera del álgebra geométrica de los antiguos pitagóricos, anterior al uso de la diagonal. Esa álgebra geométrica es la de los pitagóricos; es el dominio de los enteros, muy alejado ya del mundo de Platón. En ese dominio, el gnomón es el que sabe; en el nuevo se piensa que ese conocimiento sólo sirve a esclavos: el esclavo de Menón conoce la tabla del gnomón, sabe cuánto es dos veces dos, cuatro veces cuatro y tres veces tres. Para Sócrates, sin embargo, ese saber es ignorancia, equivale a no conocer nada: el esclavo recita la tabla, que es un recuerdo; recuerda un saber, el del pensamiento algorítmico, que el platonismo desprecia. Ese pensamiento se reduce al recuerdo, pero la nueva geometría pone de manifiesto sus deficiencias: sobre el gnomón no hay ningún número entre tres y cuatro, o entre dos y tres. La geometría hace ver que entre los números hay una inmensidad de cosas que antes no se podían ver.

La discusión pasa del campo de la aritmética al de la geometría: Sócrates pide una longitud, y el esclavo le da una cantidad; para llegar a la diagonal como lado del cuadrado duplicado no se requiere de la cantidad sino de la cualidad. La respuesta que Sócrates pide a la pregunta sobre qué línea debe construirse el cuadrado de doble superficie, debe ser: sobre *ésta*. El demostrativo dice cuál es ese lado, pero no dice cuánto mide.

El gnomón o escuadra que el esclavo propone es muy ancho; Sócrates se lo hace ver, y por ello aquél disminuye esa dimensión al sugerir un lado de tres pies, respuesta también errónea porque sus “recuerdos” se remiten a una aritmética geométrica con lagunas, donde sólo existen números racionales y enteros. El mundo matemático de la época de Platón es otro, después de Teeteto, Hipaso, Eudoxo, etcétera; es el mundo de la nueva geometría, que pone de manifiesto esas lagunas; el nuevo cuadrado debe tener un lado que es mayor de dos, pero menor que tres, la segunda respuesta del esclavo; sin embargo, con el concepto de gnomón como reminiscencia, no hay espacio para algún número situado entre dos y tres. Por tanto, hablando de áreas, en la antigua aritmética geométrica no hay más que cuadrados perfectos, con superficies de 4 ó 9 ó 16 ó 25, etcétera; es decir, cuadrados cuyos lados son de 2, 3, 4 ó 5, etcétera. El problema de la duplicación del cuadrado asume un cuadrado no perfecto, cuya área es ocho, y cuyo lado, por tanto, debe medir 8, un número irracional. Es decir, el lado del segundo cuadrado debe ser precisamente la diagonal del primero.

La respuesta del esclavo es primero un número par, después un impar; sus recuerdos no alcanzan el punto de revelarle que el número buscado no es par ni impar. La ciencia del gnomón es la ciencia de la razón, la del *logos*, que ignora lo irracional. Sócrates no pregunta cuánto mide el lado del cuadrado duplicado pues sabe que ésta es una pregunta que él no puede responder; todo lo que puede hacer es usar el demostrativo: el nuevo cuadrado se construye sobre esta línea, sobre la diagonal del primer cuadrado. Sócrates concluye su diálogo con el esclavo con estas palabras: “No es entonces la línea de tres pies la que da una superficie de ocho [...] ¿Cuál es ésta? Trata de decírmelo exactamente, y si quieres mejor no hacer cálculos, muéstrala”. Es decir, le pide no que la mida sino que la muestre. Se trata ya no de demostrar sino de mostrar, al contrario de lo que pasa al discutir sobre el cuadrado original: cuando Sócrates habla de un cuadrado racional, de dos pies de lado, le pregunta al esclavo si la superficie no sería de dos veces dos pies; cuando éste lo admite, vuelve a preguntar: “¿Cuánto hacen dos veces dos pies? Haz el cálculo y dilo”.

El gnomón deja de utilizarse porque él mismo presume que es el que conoce, pero la introducción de los irracionales muestra que no conoce todo, que es ignorante como el esclavo y, por tanto, que existen conocimientos que no se conocen, que no están en la memoria. El reconocimiento de este hecho ocasiona un giro que da lugar al nacimiento de las ciencias: se comienza a asumir que se puede y se debe buscar lo que no se conoce, lo que el conocimiento no conoce.